

MÉMOIRE
SUR
QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS
DES AXES PERMANENS DE ROTATION DES CORPS
ET
DES PLANS DIRECTEURS DE CES AXES;

PAR M. AMPÈRE,

Membre de l'Académie royale des Sciences (Institut de France), de la Société royale d'Édimbourg, de la Société Helvétique et de la Société philosophique de Cambridge.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez BACHELIER, successeur de M.^{me} veuve COURCIER, Libraire,
quai des Augustins, n.^o 55.

1823.



Ce Mémoire a d'abord été imprimé dans le recueil
de l'Académie royale des Sciences. On trouvera ici des
corrections et additions qui me paroissent importantes.

A. AMPÈRE.

MÉMOIRE

Sur quelques nouvelles propriétés des Axes permanens de rotation des corps et des Plans directeurs de ces axes ;

Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 Juin 1821.



DÉNOMINATIONS ADOPTÉES.

Je désignerai, dans ce Mémoire, sous le nom d'*axes permanens de rotation*, ou, pour abrégér, sous celui d'*axes permanens*, les lignes situées dans un corps ou menées hors de ce corps et liées invariablement avec lui, de manière qu'on puisse y déterminer un point tel, qu'en le supposant fixe et en faisant tourner le corps autour de la ligne que l'on considère, le mouvement se continue indéfiniment sans que les forces centrifuges qui en résultent tendent à déplacer cette ligne. Je nommerai *centre de rotation* d'un axe permanent le point ainsi déterminé sur cet axe, et je dirai qu'une ligne est axe permanent relativement à un point, quand ce point sera son centre de rotation.

Je réserverai le nom d'*axes principaux*, qu'on donne ordinairement à tous les axes permanens, pour désigner exclusivement les axes permanens relatifs au centre d'inertie, qui,

A *

4 MÉMOIRE SUR QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS

comme on sait, le sont non-seulement par rapport à ce centre, mais encore par rapport à un point quelconque de leur longueur.

J'appellerai *plans directeurs des axes permanens de rotation*, ou plus simplement *plans directeurs*, les plans situés dans un corps ou hors de ce corps, de manière qu'on puisse y déterminer un point tel que toutes les lignes menées par ce point dans le plan soient des axes permanens, en quelque point de la longueur de ces axes que soient d'ailleurs placés leurs centres de rotation.

Je nommerai *centre de convergence d'un plan directeur* le point ainsi déterminé sur ce plan, et je dirai qu'un plan est plan directeur relativement à un point, lorsque ce point sera son centre de convergence. Comme il sera démontré dans la suite de ce Mémoire que tout plan passant par deux axes principaux est un plan directeur relativement à tous les points de la surface, et que cette propriété ne peut appartenir à aucun autre plan, je donnerai exclusivement aux plans qui passent ainsi par deux axes principaux, le nom de *plans principaux*.

On sait qu'il y a toujours dans un corps, d'après cette manière d'en désigner les axes et les plans, trois axes principaux et trois plans principaux, et qu'il ne peut y en avoir un plus grand nombre que dans des cas particuliers où ce nombre devient infini, et qui ont été discutés depuis longtemps; en sorte qu'il serait tout-à-fait superflu de les examiner ici.

J'adopterai les dénominations de *momens d'inertie relatifs à un axe*; et de *momens d'inertie relatifs à un plan*, dans le sens que leur ont donné les auteurs qui ont déjà écrit sur ce sujet. Je distinguerai en conséquence les momens d'inertie des axes principaux, qui, en nommant x, y, z , les coordonnées relatives à ces axes, sont $\int (y^2 + z^2) dm$ pour l'axe

principal sur lequel on compte les x ; $\int (x^2 + z^2) dm$ pour celui des y , et $\int (x^2 + y^2) dm$ pour celui des z ; des momens d'inertie des plans principaux, qui sont $\int x^2 dm$ pour le plan principal passant par l'axe des y et l'axe des z ; $\int y^2 dm$ pour ce plan principal où se trouvent l'axe des x et celui des z ; et $\int z^2 dm$ pour celui qui contient les deux axes des x et des y . La somme du moment d'inertie d'un axe principal et de celui du plan principal qui lui est perpendiculaire, étant toujours égale à $\int (x^2 + y^2 + z^2) dm$, le plan perpendiculaire à l'axe dont le moment d'inertie est le plus petit, est celui des trois plans principaux dont le moment d'inertie est le plus grand, et réciproquement.

Lorsqu'on fait mouvoir un axe permanent ou un plan directeur, de manière que le centre de rotation du premier ou le centre de convergence du second s'éloigne indéfiniment du centre d'inertie du corps, l'axe ou le plan s'approche indéfiniment d'une ligne ou d'un plan tellement situé, que, si on les considérait, la ligne comme un axe permanent, le plan comme un plan directeur, on trouverait que le centre de rotation de cette ligne ou le centre de convergence de ce plan sont situés à une distance infinie. J'appellerai *limites des axes permanens*, *limites des plans directeurs*, les lignes ou les plans qui présentent cette propriété : elles présentent en même temps la plupart de celles des axes permanens ou des plans directeurs, mais non pas toutes; et ce qui fait sur-tout qu'on ne peut comprendre les limites dont nous parlons, les premières parmi les axes permanens, les secondes parmi les plans directeurs, c'est qu'on peut concevoir, pour les limites des axes permanens, des plans directeurs dans lesquels il existe un centre de convergence de ces limites, que toute ligne menée par ce centre dans le plan directeur est une limite d'axes permanens, et que cependant ces plans directeurs des limites des axes permanens n'ont

6 MÉMOIRE SUR QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS
point en général les propriétés des plans directeurs des axes permanens, et différent sur-tout tout-à-fait des limites des derniers plans, telles que nous les avons définies.

AVANT-PROPOS.

EULER, qui fit une si heureuse application de la considération des axes permanens à la détermination du mouvement d'un corps, soit libre, soit retenu par un point fixe, démontra que par tout point lié invariablement avec le corps, ou pris dans son intérieur, on peut toujours faire passer au moins trois axes permanens perpendiculaires entre eux, dont les centres de rotation sont placés à ce point. Mais il ne tint pas compte des autres axes permanens qui peuvent passer par le même point, et dont les centres sont situés à des points différens de celui que l'on considère; en général, il ne s'occupa point de la distribution des axes permanens dans un corps.

La théorie des axes permanens se borna à la démonstration de ce théorème et aux formules par lesquelles, connaissant les valeurs des momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux, on peut calculer celle du moment d'inertie relatif à un axe quelconque, jusqu'au mémoire présenté à l'Institut au mois de mai 1811 par M. Binet, tant sur les axes permanens qu'il nomme *axes principaux*, que sur une autre sorte d'axes qu'il a considérés le premier et nommés *axes conjugués*; ces axes sont devenus, dans ses mains, un sujet fécond en résultats aussi remarquables qu'inattendus, et dont il a déduit entre autres conséquences une théorie complète sur la situation des axes permanens et la manière dont ils sont distribués dans un corps. J'ai cru cependant qu'on pouvait encore ajouter quelque chose à ce beau travail; je me propose ici d'exposer le point de vue sous lequel j'ai considéré les axes permanens, et les résultats auxquels j'ai été conduit; mais je dois d'abord

démontrer quelques formules dues à M. de Lagrange, dont j'aurai besoin dans le cours de ce Mémoire.

Quand, au lieu des trois coordonnées x, y, z , on en prend trois autres x', y', z' , telles que

$$x' = ax + a'y + a''z,$$

$$y' = bx + b'y + b''z,$$

$$z' = cx + c'y + c''z,$$

il existe entre les neuf cosinus des angles formés par un des anciens axes avec un des nouveaux, et qui sont représentés ici par $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, six relations qu'on peut mettre sous différentes formes : voici une conséquence de ces relations, que je dois d'abord en déduire parce que j'en aurai besoin dans des recherches ultérieures. Les six relations étant mises sous cette forme,

$$a^2 + b^2 = 1 - c^2,$$

$$a'^2 + b'^2 = 1 - c'^2,$$

$$a''^2 + b''^2 = 1 - c''^2,$$

$$aa' + bb' = -cc',$$

$$aa'' + bb'' = -cc'',$$

$$a'a'' + b'b'' = -c'c'',$$

on en tire, en multipliant la première par la seconde et élevant la quatrième au carré,

$$a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + a^2 b'^2 + b^2 a'^2 = 1 - c^2 - c'^2 + c^2 c'^2,$$

$$a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + 2ab a' b' = c^2 c'^2;$$

ainsi

$$a^2 b'^2 + b^2 a'^2 - 2ab a' b' = 1 - c^2 - c'^2 = c''^2,$$

d'où

$$ab' - ba' = \pm c''.$$

On trouverait de même

$$\begin{aligned} b a'' - a b'' &= \pm c' \\ a' b'' - b' a'' &= \pm c. \end{aligned}$$

Mais, en suivant cette marche, on ne verrait pas comment les signes des deux dernières équations dépendent de celui de la première : c'est ce qu'on voit au contraire en partant par exemple de

$$c'' = a b' - b a',$$

et trouvant c et c' au moyen des deux relations suivantes ;

$$\begin{aligned} a c + a' c' &= -a'' c'', \\ b c + b' c' &= -b'' c'', \end{aligned}$$

qui donnent, d'après les formules des équations du premier degré,

$$\begin{aligned} c &= \frac{-b' a'' c'' + a' b'' c''}{a b' - b a'} = \frac{c''}{a b' - b a'} (a' b'' - b' a'') = a' b'' - b' a'', \\ c' &= \frac{-a b'' c'' + b a' c''}{a b' - b a'} = \frac{c''}{a b' - b a'} (b a'' - a b'') = b a'' - a b''. \end{aligned}$$

Ainsi le signe de la première équation est arbitraire ; mais, une fois qu'il a été choisi à volonté, il détermine ceux des autres équations, et en outre ceux des équations qui donnent des valeurs semblables pour b, b', b'', a, a', a'' . En effet, si l'on substitue, par exemple, les valeurs que nous venons de trouver pour c' et c'' à la place de ces quantités dans $c' a'' - c'' a'$, on trouve

$$\begin{aligned} c' a'' - c'' a' &= b a''^2 - a a'' b'' - a a' b' + b a'^2 \\ &= b - a^2 b - a a'' b'' - a a' b' = b, \end{aligned}$$

en vertu des deux relations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad a b + a' b' + a'' b'' = 0;$$

tandis qu'en substituant les mêmes valeurs dans $a' c'' - c' a''$, on aurait trouvé $-b$.

On aura donc avec

$$\begin{aligned}c &= a' b'' - b' a'', \\c' &= b a'' - a b'', \\c'' &= a b' - b a',\end{aligned}$$

ces valeurs de b, b', b'' ,

$$\begin{aligned}b &= c' a'' - a' c'', \\b' &= a c'' - c a'', \\b'' &= c a' - a c',\end{aligned}$$

dont la dépendance, relativement aux trois équations qui donnent c, c', c'' , consiste en ce que, si a , par exemple, est multiplié dans les valeurs de c, c', c'' , par b' et par $-b''$, il le sera par c'' et par $-c'$ dans celles de b, b', b'' ; et de même pour a' et pour a'' . Il est aisé d'en conclure que pour ces valeurs de c, c', c'' , b, b', b'' , celles de a, a', a'' , seront

$$\begin{aligned}a &= b' c'' - c' b'', \\a' &= c b'' - b c'', \\a'' &= b c' - c b',\end{aligned}$$

valeurs qu'il est d'ailleurs facile de vérifier par des calculs semblables à celui qui nous a donné la valeur de b .

CHAPITRE I.^{er}

Des Axes permanens assujettis à passer par un point donné.

ON peut, en général, faire passer par un point A (1), pris soit dans un corps, soit hors de ce corps, trois sortes de lignes :

- 1.^o Celles qui sont des axes permanens par rapport à ce point, et qui sont au moins au nombre de trois;
- 2.^o Celles qui ne le sont pas pour ce point, mais pour un autre point de leur longueur;

(1) Voyez la figure 1 à la page 36 de ce Mémoire.

10 MÉMOIRE SUR QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS

3.° Celles qui ne le sont pour aucun point de leur longueur.

Les premières sont déterminées par la condition qu'en les prenant pour axe des z' , chacune à son tour, $\int x' z' dm$ et $\int y' z' dm$ soient nulles; les secondes par cette autre condition, que les mêmes quantités, n'étant pas nulles pour le point A , le soient pour un point O qui s'en trouve à une distance $=r$, sur la ligne que l'on considère, en sorte que

$\int y' (z' - r) dm = 0$, et $\int x' (z' - r) dm = 0$;
d'où

$$r = \frac{\int y' z' dm}{\int y' dm}, \quad r = \frac{\int x' z' dm}{\int x' dm},$$

et la condition cherchée est exprimée par

$$\frac{\int y' z' dm}{\int y' dm} = \frac{\int x' z' dm}{\int x' dm}.$$

Comme on peut toujours prendre pour axes des x' et des y' deux droites perpendiculaires à cette ligne et rectangulaires entre elles, dans des directions telles, qu'outre les deux équations ci-dessus, on ait de plus $\int x' y' dm = 0$, la ligne passant par le point A , qui satisfera à la condition précédente, sera un axe permanent relativement au point O déterminé par la condition $AO = r$, puisqu'on aura pour ce point

$$\int x' (z' - r) dm = 0, \quad \int y' (z' - r) dm = 0, \quad \int x' y' dm = 0.$$

On voit en même temps, par ces formules, pourquoi, quand le point A est le centre d'inertie, il n'y a que deux sortes de lignes qui puissent y passer; car alors $\int x' dm = 0$, $\int y' dm = 0$, ce qui donne

$$\int x' (z' - r) dm = \int x' z' dm,$$

$$\int y' (z' - r) dm = \int y' z' dm,$$

en sorte que si la ligne est un axe permanent pour le point A , elle le sera aussi pour tous les autres points pris sur son cours.

et que, si elle ne l'est pas pour le point A , elle ne pourra jamais l'être pour aucun de ses points, si ce n'est pour un point situé à une distance infinie, puisqu'alors la valeur générale de r devient infinie.

Reste à trouver toutes les lignes qui, passant par un point A différent du centre d'inertie, satisfont à la condition

$$\frac{f y' z' dm}{f y' dm} = \frac{f x' z' dm}{f x' dm}.$$

Supposons que les axes primitifs des x, y, z , sont les axes principaux; nommons G, H, K , les trois quantités $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int z^2 dm$; M , la masse du corps; X', Y', Z' , les coordonnées du centre d'inertie relativement au point A et aux axes des x', y', z' ; X, Y, Z , celles du point A relativement au centre d'inertie et aux axes des x, y, z . Nous aurons, en représentant, comme on le fait ordinairement, par $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, les cosinus des angles formés par les deux systèmes,

$$x' = X' + ax + a'y + a''z,$$

$$y' = Y' + bx + b'y + b''z,$$

$$z' = Z' + cx + c'y + c''z;$$

$$X' = -aX - a'Y - a''Z,$$

$$Y' = -bX - b'Y - b''Z,$$

$$Z' = -cX - c'Y - c''Z,$$

parce que $x = X, y = Y, z = Z$, doivent donner $x' = 0, y' = 0, z' = 0$. En substituant ces trois dernières valeurs dans les précédentes, on aurait les valeurs connues de x', y', z' , en x, y, z, X, Y, Z ; mais nous conserverons d'abord X', Y', Z' , dans celles de x', y', z' , pour que le calcul soit moins compliqué. Elles donneront, à cause de

$$\int x dm = 0, \int y dm = 0, \int z dm = 0,$$

$$\int y z dm = 0, \int x z dm = 0, \int x y dm = 0,$$

B *

12. MÉMOIRE SUR QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS

les valeurs suivantes :

$$f x' d m = M X',$$

$$f y' d m = M Y',$$

$$f x' z' d m = M X' Z' + a c G + a' c' H + a'' c'' K,$$

$$f y' z' d m = M Y' Z' + b c G + b' c' H + b'' c'' K;$$

ce qui change les deux valeurs obtenues précédemment pour r , en

$$r = Z' + \frac{a c G + a' c' H + a'' c'' K}{M X'},$$

$$r = Z' + \frac{b c G + b' c' H + b'' c'' K}{M Y'}.$$

Pour que ces deux valeurs soient égales, il faut que

$$\frac{a c G + a' c' H + a'' c'' K}{X'} = \frac{b c G + b' c' H + b'' c'' K}{Y'},$$

ou, en mettant au lieu de X' et de Y' leurs valeurs et changeant les signes,

$$\frac{a c G + a' c' H + a'' c'' K}{a X + a' Y + a'' Z} = \frac{b c G + b' c' H + b'' c'' K}{b X + b' Y + b'' Z};$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} a b c G X + b a' c' H X + b a'' c'' K X + a b' c G Y + a' b' c' H Y \\ + b' a'' c'' K Y + a b'' c G Z + a' b'' c' H Z + a'' b'' c'' K Z = \\ a b c G X + a b' c' H X + a b'' c'' K X + b a' c G Y + b a' c' H Y \\ + b a' c'' K Y + b a'' c G Z + b a'' c' H Z + b a'' c'' K Z, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} (a b' - b a') c' H X + (a b'' - b a'') c'' K X + (b a' - a b') c G Y + \\ (a' b'' - b' a'') c'' K Y + (b a'' - a b'') c G Z + (b' a'' - a' b'') c' H Z = 0, \end{aligned}$$

qui devient, à cause des valeurs de c , c' , c'' , obtenues précédemment,

$$c' c'' (H - K) X + c c'' (K - G) Y + c c' (G - H) Z = 0.$$

Et si nous représentons par D, D', D'' , les trois différences $H - K, K - G, G - H$, entre les quantités G, H, K , prises de manière que chacune de ces quantités entre une fois positivement et une fois négativement dans les deux différences où elle se trouve, en sorte qu'on ait

$$D + D' + D'' = 0,$$

ces quantités seront aussi les différences entre les trois momens d'inertie relatifs aux axes principaux; car, en nommant ces momens A, B, C , on a, comme on sait,

$$A = H + K, B = G + K, C = G + H.$$

d'où

$$C - B = H - K = D, A - C = K - G = D', B - A = G - H = D'',$$

et l'équation que nous venons d'obtenir prendra cette forme plus simple :

$$c' c'' D X + c c'' D' Y + c c' D'' Z = 0.$$

Toutes les fois qu'une ligne passant par un point donné A , dont les coordonnées relatives aux trois axes principaux sont X, Y, Z , sera dirigée de manière que les cosinus c, c', c'' , des angles qu'elle forme avec ces trois axes, ne satisferont pas à l'équation précédente, elle ne pourra être un axe permanent; quand, au contraire, cette équation sera satisfaite, la ligne sera nécessairement un axe permanent ou une limite d'axe permanent. Il est d'ailleurs aisé de reconnaître à quel caractère on distinguera les axes permanens de leurs limites, en faisant attention, 1.^o que cette équation est toujours satisfaite par une ligne qui passe par le centre d'inertie du corps, parce qu'en prenant le point A à ce centre, on a $X = 0, Y = 0, Z = 0$, ce qui fait évanouir tous les termes de l'équation; 2.^o que quand l'axe des z' passe par le centre d'inertie, on a $\int x' dm = 0, \int y' dm = 0$, et qu'alors, si la ligne donnée n'est pas un axe principal, les quantités $\int x' z' dm$,

14. MÉMOIRE SUR QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS

$\int y' z' dm$, ne sont pas nulles, d'où il suit que les valeurs $\frac{\int x' z' dm}{\int x' dm}$ et $\frac{\int y' z' dm}{\int y' dm}$, que nous avons trouvées pour r , deviennent infinies, en sorte que les lignes qui satisfont dans ce cas à l'équation sont toutes des limites d'axes permanens. Il est aisé de voir, au reste, que cette propriété leur appartient exclusivement; ce qui résultera d'ailleurs de la détermination générale de la valeur de r que nous donnerons plus bas, cette valeur ne pouvant devenir infinie que quand la ligne dont on cherche le centre de rotation passe par le centre d'inertie. La même équation est encore satisfaite quand la ligne est parallèle à un des axes principaux, ou qu'elle est comprise dans un des trois plans rectangulaires qui joignent ces axes deux à deux. En effet, si la ligne est, par exemple, parallèle à l'axe des z , on a $c = 0$, $c' = 0$, $c'' = 1$; et comme tous les termes de l'équation de condition contiennent l'un des deux facteurs c ou c' , cette équation est satisfaite. Si la même ligne est comprise, par exemple, dans le plan des $x y$, on a $c'' = 0$ et $Z = 0$, ce qui rend encore nul le premier membre de l'équation

$$c' c'' D X + c c'' D' Y + c c' D'' Z = 0;$$

d'où il suit que les deux sortes de lignes dont nous venons de parler sont toujours des axes permanens, ou des limites d'axes permanens; ce qu'il est d'ailleurs aisé de déduire des lois de la distribution des axes permanens d'un corps qu'a données M. Binet dans le Mémoire cité plus haut.

On peut aussi écrire l'équation précédente ainsi,

$$\frac{D X}{c} + \frac{D' Y}{c'} + \frac{D'' Z}{c''} = 0;$$

et si l'on nomme s la ligne qui joint le centre d'inertie au point donné A ; m , m' , m'' , les trois cosinus des angles que cette ligne forme avec les trois axes, on aura

$$X = m s,$$

$$Y = m' s,$$

$$Z = m'' s;$$

en sorte que cette équation deviendra

$$\frac{D m}{c} + \frac{D' m'}{c'} + \frac{D'' m''}{c''} = 0;$$

d'où il suit que parmi toutes les lignes passant par un point donné A différent du centre d'inertie, celles-là seulement sont des axes permanens, ou des limites d'axes permanens, qui sont situées de manière que lorsqu'on divise les trois différences D, D', D'' , entre les momens d'inertie des trois axes principaux respectivement par les cosinus des angles qu'elles forment avec ces trois axes, et qu'on multiplie les quotiens par les cosinus des angles que forme avec les mêmes axes la droite qui joint le point A et le centre d'inertie, on trouve trois produits dont la somme est égale à zéro. Une seule des lignes qui satisfont à cette condition est une limite d'axes permanens, c'est celle qui passe à-la-fois par le point donné et le centre d'inertie.

Si l'on nomme u la distance du point A à un point dont les coordonnées soient x, y, z , et qui soit pris à volonté sur un des axes permanens passant par ce point A , on aura

$$c = \frac{x - X}{u},$$

$$c' = \frac{y - Y}{u},$$

$$c'' = \frac{z - Z}{u};$$

ce qui change l'équation

$$c' c'' D X + c c'' D' Y + c c' D'' Z = 0$$

en

$$D X (y - Y)(z - Z) + D' Y (x - X)(z - Z) + D'' Z (x - X)(y - Y) = 0.$$

En exécutant les multiplications indiquées, et faisant les réductions qui résultent de l'équation

$$D + D' + D'' = 0,$$

on a

$$DXyz + D'Yxz + D''Zxy + DYZx + D'XZy + D''XYz = 0,$$

équation commune à tous les axes permanens qui passent par le point A ; et comme elle appartient à une surface conique du second ordre, il s'ensuit que c'est sur une surface de ce genre que se trouvent tous ces axes. Cette surface, dont le sommet est au point A , passe par la ligne qui le joint au centre d'inertie et qui est la limite de tous les axes permanens qui se trouvent sur cette surface, puisque l'équation est satisfaite quand $x=0, y=0, z=0$. Elle passe aussi par les trois parallèles menées du point A aux trois axes principaux, puisque cette équation l'est aussi, soit qu'on fasse $y=Y, z=Z$, ou $x=X, z=Z$, ou enfin $x=X, y=Y$; ce qui doit être, puisque toute parallèle à un des axes principaux est, comme nous venons de le voir, un axe permanent.

L'équation commune à toutes les surfaces coniques formées par les axes permanens qui se coupent à leurs sommets, prouve qu'il n'y a pas d'axe permanent parallèle à un plan principal qui ne le soit à un des axes principaux compris dans ce plan : car, pour qu'il soit parallèle, par exemple, au plan des x, y , il faut que $z=Z$, ce qui réduit cette équation à $(x-X)(y-Y)=0$; en sorte qu'on aura à-la-fois ou $z=Z$ et $y=Y$, et alors l'axe permanent sera parallèle à l'axe des x , ou $z=Z$ et $x=X$, et alors il sera parallèle à l'axe des y .

Si l'on fait passer un plan quelconque par la ligne menée au point A au centre d'inertie, il coupera la surface conique en une autre ligne dont la direction se trouve déterminée par une relation très-simple qu'on obtient de la manière suivante :

Soient n, n', n'' les cosinus des trois angles que forme ce plan

avec les trois plans coordonnés que nous venons de considérer, ou, ce qui est la même chose, des trois angles que forme, avec les axes des x , des y et des z , la ligne menée par le point A perpendiculairement à ce plan. Comme cette ligne est à-la-fois perpendiculaire à celles dont les cosinus sont respectivement c, c', c'' et m, m', m'' , on aura

$$n^2 + n'^2 + n''^2 = 1,$$

$$nc + n'c' + n''c'' = 0,$$

$$mn + m'n' + m''n'' = 0.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$\frac{m''}{c''} = \frac{mn + m'n'}{nc + n'c'};$$

ce qui change l'équation

$$\frac{Dm}{c} + \frac{D'm'}{c'} + \frac{D''m''}{c''} = 0$$

en

$$\frac{Dmc' + D'cm'}{cc'} + \frac{D''(mn + m'n')}{nc + n'c'} = 0,$$

ou

$$Dmnc' + D'nmc' + Dmn'c' + D'm'n'cc' + D''mnc' + D''m'n'cc' = 0,$$

et à cause de $D'' = -D - D'$, cette équation se réduit à

$$D'nmc' + Dmn'c' - D'mnc' - D'm'n'cc' = 0,$$

ou

$$(D'nc - D'n'c')(m'c - m'c') = 0;$$

or le facteur $m'c - m'c'$, égalé à zéro, donne $\frac{m'}{c} = \frac{m}{c}$, ainsi

$$(D + D')\frac{m}{c} + D''\frac{m''}{c''} = 0,$$

et à cause de $D + D' = -D''$,

$$\frac{m''}{c''} = \frac{m}{c} = \frac{m'}{c'} = k;$$

mais on a

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

C

et $m^2 + m'^2 + m''^2 = 1$, ou $k^2 (c^2 + c'^2 + c''^2) = 1$;

ainsi $k = \pm 1$, on a donc

$$c = m, c' = m', c'' = m'',$$

ou

$$c = -m, c' = -m', c'' = -m'';$$

c'est-à-dire que ce facteur donne pour une des intersections du plan que nous considérons et de la surface conique la ligne qui passe par le point donné et le centre d'inertie, et qui est la limite de tous les axes permanens situés sur cette surface. L'autre intersection, correspondant à l'autre facteur

$$D' n c - D n' c' = 0,$$

déterminera, parmi les axes permanens passant par le point donné, celui qui est situé dans ce plan. On aura pour cet axe

$$\frac{n c}{D} = \frac{n' c'}{D'} = \frac{n c + n' c'}{D + D'} = \frac{n'' c''}{D''},$$

puisque $n c + n' c' = -n'' c''$ et $D + D' = -D''$. On tire de ces relations :

$$c : c' :: \frac{n'}{D'} : \frac{n}{D} :: \frac{D}{n} : \frac{D'}{n'},$$

et

$$c : c'' :: \frac{n''}{D''} : \frac{n}{D} :: \frac{D}{n} : \frac{D''}{n''};$$

ainsi

$$c : c' : c'' :: \frac{D}{n} : \frac{D'}{n'} : \frac{D''}{n''} :: D n' n'' : D' n n'' : D'' n n',$$

d'où il est aisé de conclure, en vertu de l'équation.....

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \text{ que}$$

$$c = \frac{D n' n''}{\sqrt{D^2 n'^2 n''^2 + D'^2 n^2 n''^2 + D''^2 n^2 n'^2}}$$

$$c' = \frac{D' n n''}{\sqrt{D^2 n'^2 n''^2 + D'^2 n^2 n''^2 + D''^2 n^2 n'^2}}$$

$$c'' = \frac{D'' n n'}{\sqrt{D^2 n'^2 n'^2 + D'^2 n^2 n'^2 + D''^2 n^2 n'^2}},$$

dont deux suffisent pour déterminer la position de l'axe permanent qui, passant par un point donné, se trouve dans un plan donné mené par la ligne qui joint ce point au centre d'inertie. Mais un moyen plus simple de déterminer cet axe, puisqu'il doit passer par le point *A* et doit être situé dans le plan *AGM*, c'est de prendre la valeur du cosinus de l'angle qu'il forme avec la droite menée par les points *A* et *G*; cette valeur est

$$m c + m' c' + m'' c'' = \frac{D m n n' + D' m' n n' + D'' m'' n n'}{\sqrt{D^2 n'^2 n'^2 + D'^2 n^2 n'^2 + D''^2 n^2 n'^2}};$$

Quant à l'équation du plan *GAM*, elle sera

$$n x + n' y + n'' z = 0,$$

et l'axe permanent *AM* situé dans ce plan sera représenté par deux des trois équations

$$y - Y = \frac{D' n}{D n'} (x - X),$$

$$z - Z = \frac{D'' n}{D n''} (x - X),$$

$$z - Z = \frac{D'' n'}{D' n''} (y - Y).$$

Quand le point donné *A* est dans un des plans principaux, par exemple dans le plan des *x y*, on a *Z* = 0 et *m''* = 0; en vertu de cette valeur de *m''*, l'équation

$$m n + m' n' + m'' n'' = 0$$

donne

$$\frac{n}{n'} = - \frac{m'}{m},$$

en sorte que la première des trois équations que nous venons de trouver pour un axe permanent passant par le point *A*, devient

c *

$$y - Y = - \frac{D' m'}{D m} (x - X) = - \frac{D' Y}{D X} x + \frac{D' Y}{D} ;$$

ou

$$y = - \frac{D' Y}{D X} x + \frac{D Y + D' Y}{D} = - \frac{D' Y}{Y} x + \frac{D'' Y}{D} ,$$

à cause que l'on a $\frac{m'}{m} = \frac{Y}{X}$ et $D + D' = - D''$.

Cette équation étant indépendante des angles dont les cosinus sont n, n', n'' , qui détermine la position du plan $G A M$, les axes permanens passant par le point A , correspondans aux diverses positions de ce plan, auront tous pour projection sur le plan des $x y$ une même droite représentée par cette équation, et seront par conséquent dans un même plan perpendiculaire à celui des $x y$; mais parmi ces diverses positions du plan $G A M$, il s'en trouve une où il se confond avec le plan des $x y$, alors $n = 0, n' = 0, n'' = 1$, et l'équation

$$m n + m' n' + m'' n'' = 0$$

se trouve ainsi satisfaite d'elle-même; l'équation

$$y - Y = \frac{D' n}{D n'} (x - X)$$

est aussi, puisqu'elle devient

$$\frac{y - Y}{x - X} = \frac{0}{0} ;$$

mais, comme on a alors $Z = 0$, les deux autres équations des axes permanens passant par le point A se réduisent à $z = 0$, en sorte que toutes les lignes menées par ce point dans le plan des $x y$ sont des axes permanens, et qu'en général, lorsque le point donné est dans un des plans principaux, la surface conique qui comprend tous les axes permanens qui y passent se change en deux plans, dont l'un est ce plan principal et l'autre lui est perpendiculaire.

Quand on fait ainsi $n = 0, n' = 0, n'' = 1$, les valeurs

que nous venons d'obtenir pour c et c' , deviennent $\frac{0}{0}$, et celle de c'' devient nulle, parce que son numérateur contient alors deux facteurs égaux à zéro, tandis que le dénominateur commun aux trois valeurs n'en contient qu'un; ce qui montre que l'axe permanent, cherché doit être dans ce plan, mais que sa direction y reste arbitraire, comme nous venons de le voir.

Après nous être occupés d'un plan sécant passant par le point donné A et le centre d'inertie, il est naturel de considérer le plan passant par ces deux points, qui est tangent à la surface conique. Ce plan s'obtient par la condition que ses deux intersections avec la surface se réunissent, c'est-à-dire qu'on ait, dans les formules précédentes,

$$c = m, c' = m', c'' = m'';$$

on aura donc

$$\frac{m n}{D} = \frac{m' n'}{D'} = \frac{m'' n''}{D''},$$

d'où

$$n : n' :: \frac{m}{D} : \frac{m'}{D'} :: \frac{D}{m} : \frac{D'}{m'}$$

$$n : n'' :: \frac{m}{D} : \frac{m''}{D''} :: \frac{D}{m} : \frac{D''}{m''}$$

ainsi

$$n : n' : n'' :: \frac{D}{m} : \frac{D'}{m'} : \frac{D''}{m''} :: D m' m'' : D' m m'' : D'' m m',$$

d'où l'on tirera les valeurs de n, n', n'' , qui feront connaître la direction du plan tangent à la surface conique mené par le centre d'inertie; l'équation de ce plan est

$$\frac{m x}{D} + \frac{m' y}{D'} + \frac{m'' z}{D''} = 0.$$

Nous avons déjà vu que toute ligne menée dans un des

plans principaux est un axe permanent; il était aisé d'en conclure que, quand le point donné A est dans un de ces plans, toutes les lignes qui y passent et sont situées dans ce plan doivent se trouver sur la surface conique que nous venons de déterminer, et qu'elle doit alors se réduire à deux plans, dont l'un est le plan principal qui passe par le point donné. C'est aussi ce qu'on peut déduire de son équation; car, en prenant ce dernier plan pour celui des $x y$, on a $Z = 0$, et l'équation de la surface conique devient

$$(DXy + D'Yx + D''XY)z = 0,$$

dont le facteur $z = 0$ représente le plan principal où se trouve le point donné, et l'autre facteur $DXy + D'Yx + D''XY = 0$, ne renfermant pas z , et ne contenant x et y , qu'à la première puissance, représente un plan perpendiculaire au premier et qui le coupe suivant la droite dont l'équation est

$$y = -\frac{D'Y}{DX}x - \frac{D''Y}{D},$$

comme nous l'avons déjà trouvé d'une autre manière.

Il est aisé de voir que tant qu'aucune des quantités DX , $D'Y$, $D''Z$, ne sera nulle, l'équation

$$DXyz + D'Yxz + D''Zxy + DYZx + D'XZy + D''XYZ = 0$$

ne pourra se décomposer en deux facteurs du premier degré, et que par conséquent aucune partie de la surface conique ne pourra devenir plane. Ce n'est donc que dans le cas où une des trois quantités DX , $D'Y$, $D''Z$, devient nulle, que le point dont les coordonnées sont X , Y , Z , peut présenter cette propriété qu'on puisse y faire passer un plan où toutes les lignes menées par le point donné dans ce plan soient des axes permanens: c'est ce qui peut arriver de deux manières, ou parce qu'une des quantités X , Y , Z est nulle, alors le point donné est dans un des plans principaux, une portion des axes permanens passant par le point donné se trouve dans

ce plan et les autres sont compris dans un autre plan qui lui est perpendiculaire; ou parce que, par la nature du corps, une des trois quantités D, D', D'' , est nulle. Supposons que ce soit D'' : comme $D'' = \int x^2 dm - \int y^2 dm$, il faudra que $\int y^2 dm = \int x^2 dm$, et par la théorie connue des plans principaux, tout plan passant par l'axe des z sera un plan principal. La supposition $D'' = 0$ réduit l'équation de la surface conique à

$$(D X y + D' Y x) z + (D' X y + D Y x) Z = 0;$$

mais comme alors $G = H$, les deux quantités $D = H - K$ et $D' = K - G$ sont égales et de signes contraires, cette équation peut donc s'écrire ainsi,

$$(X y - Y x) (z - Z) = 0,$$

dont le premier facteur $X y - Y x = 0$, donnant

$$\frac{y}{x} = \frac{Y}{X},$$

représente le plan qui passe par le point donné et par l'axe des z , et qui, comme nous venons de le dire, est un plan principal. L'autre facteur $z - Z = 0$, représente un autre plan passant par le point donné et parallèle au plan des $x y$; il est donc perpendiculaire au plan représenté par le premier facteur, et dans ce cas, comme dans celui que nous avons d'abord examiné, les axes permanens passant par un point donné ne peuvent être compris dans deux plans qu'autant que l'un de ces deux plans est un des plans principaux et que l'autre lui est perpendiculaire, en sorte que dans aucun cas cette propriété ne peut appartenir à un point qui ne se trouve pas dans un des plans principaux, et que les axes permanens qui passent par un point donné ne peuvent se trouver compris dans des plans qu'autant que ces plans, s'ils ne sont pas des plans principaux, soient nécessairement

parallèles à un des axes principaux. Cette proposition, qui est généralement vraie quand il s'agit des axes permanens proprement dits, cesse de l'être quand on considère un plan où passent par un même point les limites d'axes permanens qui se trouvent dans ce plan. Comme nous avons vu que toutes les lignes passant par le centre d'inertie et différentes des axes principaux sont des limites d'axes permanens, et réciproquement, il s'ensuit que tout plan passant par le centre d'inertie contient une infinité de limites d'axes permanens qui se coupent toutes à ce centre, en sorte que ces limites peuvent être comprises dans un plan et passer par un même point de ce plan, sans qu'il soit un plan perpendiculaire à un des plans principaux : c'est là une première différence entre les plans où se trouvent une infinité d'axes permanens passant par un même point ; et les plans qui jouissent de la même propriété relativement aux limites de ces axes ; une autre différence entre ces deux sortes de plans vient de ce que les premiers, outre le système des axes permanens passant par le point donné, contiennent un second système d'axes permanens parallèles entre eux et à l'axe principal, auquel le plan l'est lui-même, puisque toute ligne parallèle à cet axe est un axe permanent, tandis que la même propriété n'a pas lieu en général pour les plans où se trouvent une infinité de limites d'axes permanens, mais seulement dans le cas particulier où ces derniers plans seraient parallèles à un axe principal qui y serait alors nécessairement contenu.

Les plans passant par le centre d'inertie et dirigés d'une manière quelconque, contenant une infinité de limites d'axes permanens, sont, d'après nos définitions, les plans directeurs de ces limites, et leur centre de convergence est au centre d'inertie ; mais ils ne doivent point être confondus avec les plans directeurs des axes permanens proprement dits, puisqu'au lieu de présenter toujours, comme ces derniers, la

propriété de contenir un second système d'axes permanens parallèles entre eux, ils ne la présentent que dans le cas particulier où ils sont perpendiculaires à un plan principal : c'est pourquoi, dans tout ce que nous allons dire des plans directeurs, nous entendrons toujours par ce mot les plans directeurs des axes permanens, et non ceux de leurs limites.

Si le point donné se trouvait sur un des axes principaux, en prenant cet axe pour celui des z , on aurait $X=0$, $Y=0$; l'équation de la surface conique deviendrait

$$D' Z x y = 0,$$

et l'on aurait $x=0$, ou $y=0$, c'est-à-dire que les deux plans dans lesquels se change alors cette surface sont les deux plans principaux qui passent par le point donné; ce qui est d'ailleurs évident, puisque toutes les lignes menées par un point quelconque pris dans les plans principaux sont des axes permanens.

Lorsque l'intégrale $\int x^2 dm$ est égale à $\int y^2 dm$, ce qui donne $D''=0$, l'équation que nous venons d'obtenir pour le cas où le point donné est sur l'axe des z , s'évanouit : ce qui indique que dans ce cas toutes les lignes menées par ce point, dans quelque direction que ce soit, sont des axes permanens; ce qu'il est d'ailleurs bien aisé de voir *a priori*.

L'équation générale

$$D X y z + D' Y x y + D'' Z x y + D Y Z x + D' X Z y + D'' Y X z = 0$$

disparaît aussi quand les trois intégrales $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int z^2 dm$, sont égales entre elles, parce qu'alors toutes les lignes menées de quelque manière que ce soit par un point quelconque sont des axes permanens.

Enfin, si le point donné était au centre d'inertie, on aurait $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, et l'équation de la surface conique disparaîtrait encore, parce que tout plan mené par le centre d'inertie est, comme nous l'avons vu plus haut, un plan

directeur des limites des axes permanens qui se trouvent dans ce plan, et dont le centre de convergence est au centre d'inertie. Il suit de ces diverses considérations, qu'outre les plans directeurs des limites des axes permanens, on doit distinguer dans un corps quatre sortes de plans :

1.^o Les plans directeurs qui le sont relativement à tous les points de leur surface, propriété qui ne peut appartenir en général qu'aux plans principaux, comme il n'y a que les axes principaux qui soient des axes permanens relativement à tous les points de leur longueur, mais qui, dans le cas où les momens d'inertie de deux axes principaux sont égaux entre eux, appartient aussi aux plans menés par un point quelconque perpendiculairement à l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres, comme il est aisé de le conclure de ce qui a été dit plus haut relativement à la forme que prend alors l'équation de la surface conique ;

2.^o Les plans directeurs à un seul centre de convergence, qui contiennent toujours deux systèmes d'axes permanens, l'un formé d'axes permanens passant par un point déterminé de ces plans, qui est leur centre, et l'autre, d'axes permanens parallèles entre eux et à un des axes principaux, auquel le plan directeur est nécessairement parallèle ;

3.^o Les plans qui, sans avoir de centre de convergence, satisfont aux mêmes conditions que ceux qui en ont, parce que le point où devait être leur centre de convergence se trouve placé à une distance infinie, en sorte que les deux systèmes d'axes permanens qu'ils contiennent se composent tous deux d'axes parallèles entre eux, et qu'on doit par conséquent considérer chacun de ces plans comme une limite dont un plan directeur peut s'approcher d'aussi près que l'on veut sans jamais l'atteindre. Il est aisé de voir que cette propriété appartient à tout plan perpendiculaire à un des axes

principaux, qui, étant à-la-fois perpendiculaire à deux plans principaux, contient un système d'axes permanens perpendiculaire à l'un d'eux, et un système d'axes de rotation perpendiculaire à l'autre. Nous verrons, quand nous aurons déterminé en général la position du centre de convergence d'un plan perpendiculaire à un des plans principaux, que ce centre ne se trouve porté à une distance infinie que dans le cas où le plan est à-la-fois perpendiculaire sur deux plans principaux, en sorte que la propriété d'être des limites de plans directeurs appartient exclusivement aux plans situés de cette manière.

4.^o La quatrième espèce de plans comprend tous ceux qui ne satisfont à aucune des conditions auxquelles sont assujettis ceux dont nous venons de parler.

Lorsque le point donné A est dans le plan des $x y$, en sorte que $Z = 0$, le plan directeur dont il est le centre de convergence a pour équation, comme nous venons de le voir,

$$D X y + D' Y x + D'' X Y = 0,$$

d'où il suit que son intersection avec le plan des $x y$, qui est représentée par la même équation, forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est $-\frac{D' Y}{D X}$. Cette valeur ne varie pas quand on place successivement le point donné à différens points d'une ligne située dans le plan des $y x$ et passant par le centre d'inertie; d'où il suit que tous les plans directeurs dont les centres de convergence se trouvent sur une telle ligne sont parallèles entre eux, et réciproquement, que tous les centres de convergence d'un système de plans directeurs parallèles entre eux sont placés sur une même droite passant par le centre d'inertie. Nous pourrions appeler cette ligne *axe des centres de convergence*, ou, pour abréger, *axe de convergence*; et chaque axe de convergence,

D*

correspondant à un système de plans directeurs parallèles entre eux, formera avec ces plans un angle qui sera la différence de deux autres dont les tangentes ont respectivement pour valeur $\frac{Y}{X}$ et $-\frac{D'Y}{DX}$; d'où il suit que la tangente de cet angle est

$$\frac{DXY + D'XY}{DX^2 - D'Y^2} = \frac{D^*XY}{D'Y^2 - DX^2}.$$

Pour que cet angle soit droit, il faut que

$$D'Y^2 - DX^2 = 0,$$

et qu'ainsi

$$\frac{Y}{X} = \pm \sqrt{\frac{D}{D'}} = \pm \sqrt{\frac{H-K}{K-G}}.$$

Cette valeur ne peut être réelle qu'autant que $K = \int z^2 dm$ est compris entre $G = \int x^2 dm$ et $H = \int y^2 dm$, c'est-à-dire qu'autant que le plan qu'on a choisi pour celui des xy , et où se trouve l'axe du centre de convergence, est celui des trois plans principaux dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les moments d'inertie relatifs aux deux autres plans principaux. Ce n'est donc que dans ce plan, celui des trois plans principaux qui passe par les deux axes principaux dont l'un a le plus grand et l'autre le plus petit moment d'inertie, que l'on peut trouver deux lignes, déterminées par la double valeur de $\frac{Y}{X}$, qui soient des axes de centres de convergence perpendiculaires aux plans directeurs dont tous les centres de convergence se trouvent sur ces lignes. Il ne peut donc, en général, exister dans un corps que deux systèmes de plans directeurs parallèles, tels que le centre de convergence soit, pour chacun de ces plans, au point où il est rencontré par la perpendiculaire abaissée du centre d'inertie du corps sur ce plan. Les plans de ces deux systèmes sont évidemment

parallèles à l'axe principal dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les moments d'inertie des deux autres axes principaux.

Dans le cas particulier où deux des trois axes principaux ont le même moment d'inertie, il faut, pour que

$$\frac{Y}{X} = \pm \sqrt{\frac{H-K}{K-G}}$$

soit réelle, que l'axe des z soit un de ceux dont les moments d'inertie sont égaux. Si l'autre est pris pour l'axe des x , les moments d'inertie de ces deux axes étant représentés respectivement par $G + H$ et par $H + K$, on aura

$$G = K \text{ et } \frac{Y}{X} = \frac{1}{0},$$

d'où il suit que les deux lignes dont nous venons de parler se réunissent dans l'axe des y . Si l'on prenait, au contraire, cet autre axe pour celui des y , on aurait

$$H = K \text{ et } \frac{Y}{X} = 0;$$

ce serait donc sur l'axe des x que se réuniraient ces deux lignes : ce qui n'est qu'une autre manière d'arriver au même résultat, savoir, que dans ce cas les deux lignes se confondent entre elles et avec l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres. Il n'y a donc plus alors qu'un seul système de plans directeurs parallèles dont les centres de convergence soient aux points où ils rencontrent une perpendiculaire commune passant par le centre d'inertie, et ces plans sont alors tous perpendiculaires à l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal à ceux des deux autres axes principaux.

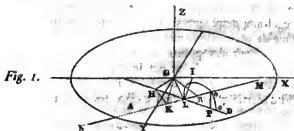
CHAPITRE II.

Formules pour reconnaître si une ligne donnée est un axe permanent, et pour déterminer dans ce cas le centre de rotation de cet axe et son moment d'inertie.

QUAND une droite NM (fig. 1) est donnée et qu'on veut savoir si elle est un axe permanent, on pourrait le faire d'après les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, en prenant à volonté un point A sur cette ligne et en voyant si l'équation

$$c'c''DX + cc''D'Y + cc'D''Z = 0$$

est satisfaite. Mais, comme alors la condition exprimée par cette équation doit être indépendante de la position arbitraire où l'on place le point A sur NM , il faut considérer X, Y, Z comme les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne et les éliminer de l'équation que nous venons de trouver. Soit L le point où la ligne donnée NAM rencontre le plan des xy ; nommons p et q les coordonnées de ce point rapportées aux axes principaux GX, GY ; α l'angle que forme sa projection LD sur ce plan avec l'axe des x , et β l'angle dont le cosinus est c' , et qui est le complément de l'angle DLN : on aura



$$X - p : Y - q : Z :: c : c' : c'',$$

d'où

$$X = p + \frac{c' Z}{c''},$$

$$Y = q + \frac{c' Z}{c''}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$c' c'' D X + c' c'' D' Y + c c' D'' Z = 0,$$

et qu'on se rappelle que

$$D + D' + D'' = 0,$$

on verra qu'elle se réduit à

$$c' c'' D p + c c'' D' q = 0,$$

ou

$$\frac{c'}{c} = - \frac{D' q}{D p};$$

mais, par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on a $c = \cos \alpha \sin \beta$, $c' = \sin \alpha \sin \beta$, et par conséquent

$$\tan \alpha = \frac{c'}{c} = - \frac{D' q}{D p}.$$

Cette valeur de $\tan \alpha$ fait connaître la direction que doit avoir la projection d'une ligne qui rencontre le plan des $x y$ en un point dont les coordonnées sont p et q , pour qu'elle soit un axe permanent; et comme la valeur de $\tan \alpha$ est indépendante de l'angle β , c'est-à-dire de l'inclinaison de la ligne donnée sur le plan des $x y$, tous les axes permanents qui passent par le point de ce plan dont p et q sont les coordonnées, seront tous compris dans le plan parallèle à l'axe des z , dont l'intersection avec celui des $x y$ est la projection dont nous venons de déterminer la direction; ce qui s'accorde avec ce qui a été dit des propriétés des plans de convergence dans le chapitre précédent.

Ainsi, pour savoir si une ligne donnée est un axe permanent, il faut déterminer le point où elle rencontre un des plans principaux et la direction de sa projection sur ce plan, et voir si l'angle α qui se trouve déterminé par cette direction, ainsi que les coordonnées p et q du point de rencontre, satisfont à l'équation de condition que nous venons d'obtenir.

Quand on aura ainsi reconnu qu'une ligne est un axe de rotation, et qu'on voudra déterminer son centre de rotation, on se rappellera que la distance AO de ce centre au point A , que nous avons désignée par r , est égale à

$$Z' + \frac{acG + a'c'H + a''c''K}{MX'};$$

et comme $a'c' = -ac - a''c''$, cette valeur devient

$$AO = Z' + \frac{ac(G-H) + a''c''(K-H)}{MX'} = Z' + \frac{acD' - a''c''D}{MX'};$$

mais, à cause des deux équations

$$c'c''DX + cc'D'Y + cc'DZ = 0$$

et

$$D' = -D - D'',$$

on a

$$c''D(c'X - cY) + cD''(c'Z - c''Y) = 0$$

ou

$$c''D = -\frac{c'Z - c''Y}{c'X - cY} cD'',$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} acD' - a''c''D &= cD'' \left(a + a'' \frac{c'Z - c''Y}{c'X - cY} \right) \\ &= \frac{cD''(ac'X - acY - a''c''Y + a''c'Z)}{c'X - cY} \\ &= \frac{cc'D''(aX + a''Y + a''Z)}{c'X - cY} = \frac{cc'D''X'}{c'Y - c'X}; \end{aligned}$$

la valeur de AO se réduit donc à

$$AO = Z' + \frac{c'c''D''}{M(c'Y - c'X)}.$$

Si l'on abaisse du centre d'inertie la perpendiculaire GK sur la ligne donnée AM , la distance AK sera celle que nous avons désignée par Z' , et par conséquent

$$KO = AO - AK = \frac{c'c''D''}{M(c'Y - c'X)}.$$

Il est aisé de s'assurer, par de simples réductions au même dénominateur, que les trois quantités $\frac{c'c''D''}{c'Y - c'X}$, $\frac{c'c''D'}{c''X - c'Z}$, $\frac{c'c''D}{c'Z - c''Y}$, sont égales entre elles en vertu des équations $c'c''DX + c'c''D'Y + c'c''D''Z = 0$ et $D + D' + D'' = 0$, d'où il suit qu'au lieu de la valeur précédente de KO , on pourra employer une de ces deux-ci,

$$KO = \frac{c'c''D'}{M(c''X - c'Z)}, \quad KO = \frac{c'c''D}{M(c'Z - c''Y)}.$$

Si l'on remplace X et Y par leurs valeurs en p, q, Z , que nous venons de trouver, celles de KO se réduiront à

$$KO = \frac{c'c''D''}{M(cq - c'p)}, \quad KO = \frac{c'D'}{Mp}, \quad KO = -\frac{c'D}{Mq}.$$

Concevons maintenant qu'on élève au centre de rotation O un plan perpendiculaire à l'axe permanent LM , il rencontrera l'axe des x et celui des y en des points tels, qu'en nommant x_1 et y_1 les distances entre le centre d'inertie et ces deux points, on aura $KO = cx_1$, et $KO = c'y_1$, d'où il suit que $x_1 = \frac{D'}{Mp}$, et que $y_1 = -\frac{D}{Mq}$. Il suffira donc, pour

déterminer le point O , de construire une de ces valeurs et de la porter, à partir du centre d'inertie, si c'est la première, sur l'axe des x , si c'est la seconde, sur l'axe des y , et d'abaisser

d'un des deux points ainsi déterminés une perpendiculaire sur l'axe permanent ALM , elle viendra rencontrer cet axe au point cherché O .

La condition qui exprime que la droite ALM est un axe permanent, se réduit à ce que, si l'on construit les deux points dont nous venons de parler, les deux perpendiculaires qu'on abaissera de ces deux points sur la droite la rencontreront au même point. En effet, cette condition est que la projection LD de ALM sur le plan des xy forme, avec l'axe des x , un angle dont la tangente soit $-\frac{D'q}{Dp}$, et la droite qui joint ces deux points forme, avec le même axe, un angle dont la tangente est $-\frac{y'}{x'} = \frac{Dp}{D'q}$; cette condition exprime donc que ces deux droites se coupent à angle droit dans le plan des xy , qu'on peut par conséquent abaisser par la dernière un plan perpendiculaire à l'axe permanent ALM , et que les deux perpendiculaires dont nous venons de parler, se trouvant nécessairement dans ce plan, rencontrent ALM en un même point.

Les valeurs de x , et de y , peuvent s'écrire ainsi, $x = \frac{A-C}{Mp}$, $y = \frac{B-C}{Mq}$; en joignant les deux points que ces valeurs déterminent l'un sur l'axe des x et l'autre sur celui des y , on aura une droite perpendiculaire au plan directeur $LM D$, qui le rencontrera au point O' , qui est le centre de rotation de l'axe permanent LD , intersection de ce plan directeur avec celui des xy , et il suit de ce qu'on vient de voir, que, si l'on joignait les points O et O' par une droite, elle serait l'intersection du même plan avec un plan perpendiculaire à l'axe permanent ALM , elle serait donc aussi perpendiculaire à cet axe, en sorte que le point O se trouve sur la circonférence

décrite dans le plan directeur sur le diamètre $L O'$. La même chose pouvant se dire de tous les axes permanens situés dans ce plan et passant par le point L , on voit qu'ils ont tous leurs centres de rotation sur cette circonférence.

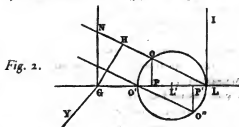
Nous avons nommé le point L le centre de convergence du plan directeur $D L M$; nous pourrions donner le nom d'*axe de ce même plan* à la ligne qui lui est élevée perpendiculairement au point O' et par laquelle passent tous les plans élevés perpendiculairement sur les axes permanens qu'il contient aux centres de rotation de ces axes. Comme l'axe du plan directeur dont le centre de convergence situé dans le plan des $x y$ a pour coordonnées p et q rencontre les axes des x et des y dans des points dont les distances au centre d'inertie sont respectivement $\frac{D'}{M p}$ et $-\frac{D}{M q}$, son équation est $D p x - D' q y = \frac{D D'}{M}$, tandis que celle de la projection $L \bar{D}$ de l'axe permanent $A L M$ qui coupe au point O' l'axe du plan directeur, est

$$y - q = -\frac{D' q}{D p} (x - p) \text{ ou } D p y + D' q x = (D + D') p q;$$

d'où il suit, à cause de $D + D' + D'' = 0$, que si l'on nomme p' et q' les coordonnées du point O' pour un plan directeur dont le centre de convergence a pour coordonnées p et q , les valeurs de p' et de q' seront déterminées par les deux équations $D p p' - D' q q' = \frac{D D'}{M}$, et $D p q' + D' q p' + D'' p q = 0$.

Si le point L se trouvait sur l'axe des x , on aurait $q = 0$, et ces deux équations deviendraient $p p' = \frac{D'}{M}$, et $q' = 0$, en sorte que le plan $L M D$ se confondrait avec celui des $x z$ où se trouveraient nécessairement tous les axes perma-

nens passant par le point L qui ne seraient pas dans le plan des $x y$. Soit donc NGL (fig. 2) le plan des $x z$; toutes les



droites menées dans ce plan étant des axes permanens, pour avoir le centre de rotation d'une de ces droites, telle que NL qui rencontre en L l'axe des x , il faudra, en nommant p la distance GL , prendre $GO' = p' = \frac{D'}{Mp}$, et décrire sur $LO' = p - \frac{D'}{Mq}$ la circonférence $LOO'O''$, lieu de tous leurs centres de rotation; cette circonférence rencontrera NL au point cherché O .

Comme l'équation $pp' = \frac{D'}{M}$ est symétrique relativement à p et à p' , si l'on fait au contraire $GO' = p$, on aura $GL = p'$, d'où il suit que la circonférence $LOO'O''$ n'est pas seulement le lieu des centres de rotation des droites menées dans le plan NGL par le point O' , mais encore de celles qui y sont menées par le point O' .

Cette réciprocité ne peut avoir lieu que quand le plan de convergence est un des plans principaux; car, lorsque q n'est pas nul, il faudrait que les deux équations entre p, q, p', q' , subsistassent quand on y changerait p en p', q en q' , et réciproquement; or cela arrive en effet à la première $Dpp' - D'qq' = \frac{DD'}{M}$; mais, pour qu'il en fût de même de la

seconde, qui peut s'écrire ainsi,

$$q' - q = -\frac{D'q}{Dp} (p' - p), \text{ il faudrait qu'on eût}$$

$$\frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}, \text{ et par conséquent } \frac{q}{p} = \frac{q' - q}{p' - p} = -\frac{D'q}{Dp}, \text{ ou}$$

$D' = -D$ et $D' = -D - D' = 0$, en sorte qu'il faudrait que les moments d'inertie A et B des axes principaux $G X$ et $G Y$ (fig. 1) fussent égaux entre eux, et alors le plan $L M D$ serait un plan principal comme tous les plans menés par l'axe $G Z$.

Quand le point L (fig. 2), où l'axe permanent situé dans le plan principal $L G N$ rencontre l'axe principal $G L$, dont le moment d'inertie surpasse celui de l'autre axe principal $G N$ situé dans le même plan, tombe en L' à une distance

$$\text{du centre d'inertie } G L' = \sqrt{\frac{D'}{M}}, \text{ on a } \frac{D'}{M p} = p, \text{ et la}$$

valeur de $L O$ devient nulle, quelle que soit celle de l'angle β , en sorte que tous les axes permanens situés dans le plan $N G L$ et passant par le point L' ont alors leur centre de rotation à ce point.

Tant que les trois moments d'inertie des axes principaux sont inégaux, il est clair qu'il ne peut y avoir sur chaque plan principal que deux points, un de chaque côté du centre d'inertie, qui présentent cette propriété relativement aux axes permanens menés dans ces plans, et qu'il y en a toujours deux qui sont situés sur celui des deux axes principaux qui s'y trouvent, dont le moment d'inertie est le plus grand, parce que $D' = A - C$, à une distance du centre d'inertie du corps égale à la racine carrée de la différence des moments d'inertie de ces deux axes, divisée par la masse du corps.

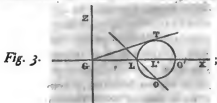
Il suit de là que, quand ces deux moments d'inertie sont égaux entre eux, les deux points dont nous parlons, relatifs au plan principal passant par ces deux axes, se réunissent au centre d'inertie, et qu'il ne peut y en avoir deux qui ne soient pas

situés à ce centre que sur le troisième axe principal, et cela seulement quand son moment d'inertie est plus grand que celui des deux autres. On sait que MM. Poisson et Binet ont démontré que, dans ce dernier cas, toutes les lignes qui y passent sont des axes principaux qui y ont tous leur centre de rotation, et que c'est le seul cas où un point pris dans un corps dont les trois moments d'inertie relatifs aux axes principaux ne sont pas égaux entre eux, puisse présenter cette propriété relativement à toutes les droites qui y passent. Lorsque les trois moments d'inertie sont inégaux, on a au contraire toujours six points situés sur les axes principaux qui présentent la même propriété, mais seulement à l'égard des droites comprises dans les plans principaux; l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand en présente quatre, deux pour chacun des plans principaux dont il est l'intersection; et celui dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les deux autres, en présente deux pour le plan principal qui le joint à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit.

Lorsqu'une ligne est donnée sur un des plans principaux, on trouvera ainsi son centre de rotation : après l'avoir prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en L (fig. 3) celui des deux axes principaux situés dans ce plan dont le moment d'inertie est le plus grand, déterminez le point L' de manière

que $GL' = \sqrt{\frac{D'}{M}}$, et faites la proportion

$$GL : GL' :: GL' : GO'$$



puis sur le diamètre $L O'$ décrivez la circonférence $L O O'$ qui coupera la ligne donnée au point cherché O . De plus, si $G T$ est la tangente menée du point G à cette circonférence, on aura $G T = \sqrt{G L \times G O'} = G L$.

Réciproquement, si le point O est donné dans un plan principal et qu'on demande les directions des deux axes permanens menés dans ce plan de manière que leurs centres de rotation soient en O (fig. 4), on tirera $G O$ et on fera la proportion

$$G O : G L :: G L' : G S,$$

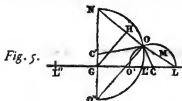
Fig. 4.



ce qui déterminera un second point S de la circonférence $L O L$, en sorte qu'en élevant sur le milieu R de $O S$ la perpendiculaire $R C$, elle coupera l'axe principal $G L$ au centre C de cette circonférence, et en la décrivant on aura par ses intersections avec $G L$ les points L, L' , auxquels on tirera les lignes $O L, O L'$, qui seront les axes permanens cherchés. Le troisième axe permanent relatif au point O sera la perpendiculaire élevée par ce point au plan principal.

Si l'on considère le point N (fig. 5) où le même axe permanent $O L$ rencontre celui des deux axes principaux du plan $N G L$ des $x z$ qui a le plus petit moment d'inertie, et que nous avons pris pour l'axe des z , on trouvera la circonférence qui est le lieu de tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point N et situés dans le plan $G N L$,

en prenant $GO'' = \frac{D'}{M \times GN}$; cette circonférence coupera l'axe GL en un point dont la distance au centre d'inertie G sera égale à $\sqrt{GN \times GO''}$, c'est-à-dire à $\frac{D'}{M}$; ce sera donc au point L' dont nous venons de rappeler les propriétés, et dont la situation reste toujours la même, quelle que soit celle du point N . On déduit de cette considération une solution



plus simple des deux problèmes précédents : car, si l'on veut déterminer le point O quand la ligne NM est donnée, il suffit de prolonger celle-ci jusqu'à ce qu'elle rencontre en N l'axe principal dont le moment est le plus petit, et de décrire la circonférence qui, passant par les deux points N et L , a son centre sur GN ; elle coupera NM au point cherché O .

Si au contraire le point O est donné et qu'on veuille avoir la direction des deux axes permanens compris dans le plan NGL , qui ont leur centre de rotation en O , on décrira le même cercle par les points O et L' . Ce cercle coupera GN aux points N et O'' , tels qu'en tirant ON et OO'' ce seront les deux axes permanens cherchés. Si l'on mène du point O aux centres C et C' des circonférences LOO' , NOO'' , les rayons CO , $C'O$, on aura $GC'O = 2GLO$, $GC'O = 2GNO$; ainsi $GC'O + GC'O = 2(GLO + GNO) =$ deux angles droits; et comme l'angle $CC'C'$ est droit, il restera dans le quadrilatère $GCOE'$ un angle droit pour la

valeur de $CO C'$: ainsi toutes les circonférences telles que $LO O'$ (fig. 6) couperont à

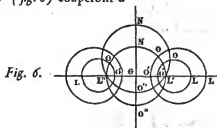


Fig. 6.

angles droits toutes les circonférences $NO O''$; il est d'ailleurs aisé de voir que, si l'on projette stéréographiquement sur le plan $L L' N$ tous les parallèles et tous les méridiens d'une sphère dont les pôles seraient situés en L' et en L'' , les projections des premiers seront les circonférences $LO O'$, et les projections des seconds, les circonférences $NO O''$.

Reprenons le cas général d'un axe permanent LM , situé hors des plans principaux et qui rencontre en L (fig. 1) celui de ces plans qu'on a choisi pour le plan des xy ; soient toujours p, q , les coordonnées de ce point relatives à l'axe des x et à celui des y , en sorte qu'on ait à ce point $x = p, y = q, z = 0$, comme AL est la valeur de z qui y correspond, $AL = Z' + cp + c'q$ et $KL = AL - AK = cp + c'q$.

Mais nous avons vu que $KO = \frac{cc'D''}{M(cq - c'p)}$, et que, α, β désignant les deux angles que nous avons ainsi nommés page 30, on avait, à cause que $\tan \alpha = -\frac{D'q}{Dp}$, ces valeurs de c et de c' ,

$$c = \cos \alpha \sin \beta = \frac{Dp \sin \beta}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}},$$

$$c' = \sin \alpha \sin \beta = -\frac{D'q \sin \beta}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}};$$

F

on en tire

$$c p + c' q = \frac{D p^2 - D' q^2}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} \sin \beta,$$

$$c q - c' p = \frac{D p q \sin \beta + D' p q \sin \beta}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} = - \frac{D'' p q \sin \beta}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}},$$

$$c c' = - \frac{D D' p q \sin^2 \beta}{D^2 p^2 + D'^2 q^2};$$

ainsi

$$K L = \frac{D p^2 - D' q^2}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} \sin \beta, K O = \frac{D D' \sin \beta}{M \sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}};$$

$$\text{et par conséquent } K L : K O :: D p^2 - D' q^2 : \frac{D D'}{M}.$$

Si l'on décrit sur le plan des $x y$, des sections coniques dont les équations soient de la forme

$$D p^2 - D' q^2 = E,$$

E étant une quantité quelconque, la tangente de l'angle que la normale à un des points L d'une de ces courbes dont les coordonnées sont représentées en général par p et q , forme avec l'axe des x , sera

$$-\frac{dp}{dq} = -\frac{D' q}{D p} = \tan \alpha,$$

d'où il suit que la projection LD de la ligne donnée sur le plan des $x y$ se confondra avec cette normale, et le plan directeur qui contient tous les axes permanens passant par le point L sans se trouver dans le plan XGY , sera le plan normal à cette courbe.

On aura de plus

$$K L : K O :: E : \frac{D D'}{M},$$

d'où il suit que le rapport des deux distances KL , KO , sera constant pour les axes permanens de tous les plans

directeurs normaux à une même courbe; ce qui donne une construction très-simple de la distance $K O$ qui détermine le point O . La distance $L O = K O - K L$ aura pour valeur

$$\frac{\frac{D D'}{M} + D' q^2 - D p^2}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} \sin \beta \text{ ou } \frac{\frac{D D'}{M} - E}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} \sin \beta,$$

et sera aussi en rapport constant pour les mêmes axes permanens soit avec $K L$, soit avec $K O$.

Si l'on fait dans ces formules $\beta = \frac{\pi}{2}$, la ligne $L M$ deviendra l'intersection $L D$ du plan directeur et de celui des $x y$, qui, comme nous l'avons dit, est toujours un axe permanent. On aura, en supposant que O' est son centre de rotation, et H le point où elle rencontre la perpendiculaire $G H$ abaissée du centre d'inertie sur cette intersection,

$$H O' = \frac{D D'}{M \sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}},$$

$$H L = \frac{E}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}},$$

$$H L : H O' :: E : \frac{D D'}{M},$$

$$L O' = \frac{\frac{D D'}{M} - E}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}}.$$

En comparant cette valeur de $L O'$ avec celle de $L O$, on voit que

$$L O = L O' \sin \beta;$$

d'où il est aisé de conclure que la courbe $L O O'$ qui passe par tous les centres de rotation des axes permanens menés par le point L et situés dans le plan $L M D$, est une circonférence de cercle, ainsi que nous l'avons déjà vu pages 34 et 35; le diamètre de cette circonférence est

F*

$$L O' = \frac{\frac{D D'}{M} - D p^2 + D' q^2}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}}.$$

Nous avons considéré les sections coniques tracées sur le plan des $x y$ et ayant pour équation $D p^2 - D' q^2 = E$; toutes les courbes ainsi décrites sur les trois plans principaux détermineront, à chaque point du plan principal où elles sont tracées, la situation du plan directeur dont le centre de convergence est à ce point. Ces courbes sont des sections coniques semblables sur chaque plan principal, puisque le rapport des coefficients D et D' est le même pour toutes celles d'un même plan. On a des hyperboles sur le plan des $x y$ quand

$D = f y^2 d m - f z^2 d m$, et $D' = f z^2 d m - f x^2 d m$, sont de même signe, c'est-à-dire quand le moment d'inertie $f z^2 d m$, relatif au plan principal que l'on considère, est intermédiaire entre les moments d'inertie relatifs aux deux autres plans principaux, ou encore lorsque c'est le plan principal qui passe par les deux axes principaux dont les moments d'inertie sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit des trois moments d'inertie relatifs aux axes principaux, tandis que ce sont des ellipses sur les deux autres plans principaux.

Nous avons vu, à la fin du chapitre précédent, que ce plan contient les deux seuls axes de convergence qui sont perpendiculaires aux plans directeurs dont les centres de convergence se trouvent sur ces axes, et que les tangentes des angles compris entre ces mêmes axes et celui des x sont représentées par $\pm \sqrt{\frac{D'}{D}}$; mais les asymptotes des hyperboles dont l'équation est $D p^2 - D' q^2 = E$, forment aussi avec l'axe des x des angles dont les tangentes sont égales à $\pm \sqrt{\frac{D'}{D}}$; ce sont donc les axes de convergence dont nous venons de parler qui sont les asymptotes communes de toutes ces hyperboles.

Suivant que les valeurs qu'on donnera à E seront positives ou négatives, les hyperboles se trouveront dans deux des quatre angles que forment leurs communes asymptotes ou dans les deux autres. Ces angles se distinguent parce que deux d'entre eux sont divisés en deux parties égales par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand, et que les deux autres le sont par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit.

Comme c'est en prenant le premier de ces deux axes pour l'axe des x ou des p , et le second pour l'axe des y ou des q , qu'on a $A > C > B$, et par conséquent $G < K < H$, ce qui donne D et D' positifs, il est clair qu'une hyperbole représentée par l'équation $Dp^2 - D'q^2 = E$, aura tous ses points dans les deux angles, opposés au sommet qui sont divisés en deux parties par l'axe dont le moment d'inertie est le plus grand quand q^2 sera plus petit que $\frac{Dp^2}{D'}$ et qu'ainsi E sera positif; tandis que ces points tomberont dans les deux angles opposés au sommet, formés par les mêmes asymptotes et divisés en deux parties égales par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit, quand q^2 sera plus grand que $\frac{Dp^2}{D'}$ et que E sera par conséquent négatif. Je désignerai toutes les hyperboles comprises dans les deux premiers angles sous le nom de *premières hyperboles*, et celles qui sont comprises dans les deux derniers, sous le nom de *secondes hyperboles*. Quant à la forme des mêmes courbes sur les deux autres plans principaux, si nous prenons d'abord pour plan des $x y$ le plan principal dont le moment d'inertie est le plus grand, K sera plus grand que H et que G , d'où il suit que $D = H - K$ sera négatif, et $D' = K - G$, positif; l'équation $Dp^2 - D'q^2 = E$ deviendra donc, en changeant les signes,

$$(K - H)p^2 + (K - G)q^2 + E = 0,$$

et il faudra prendre pour E une quantité négative arbitraire pour que cette équation soit possible. Comme les coefficients de p^2 et de q^2 y sont affectés du même signe, elle représentera toujours une ellipse, et l'on aura dans ce plan une infinité d'ellipses, que je désignerai sous le nom de *premières ellipses*. Au contraire, quand on prendra pour plan des $x y$ le plan principal dont le moment d'inertie est le plus petit, D sera positif, D' négatif; et l'équation entre p et q devant alors s'écrire ainsi,

$$(H - K)p^2 + (G - K)q^2 - E = 0,$$

on voit qu'il faudra donner à E une valeur positive arbitraire. On aura ainsi dans ce plan un système d'ellipses que je distinguerai de celles qui se trouvent sur l'autre plan principal, en les nommant *secondes ellipses*.

Lorsque deux des trois momens d'inertie sont égaux entre eux, il y a une infinité de plans principaux passant par l'axe principal dont le moment n'est pas égal à ceux des deux autres, et un plan principal qui lui est élevé perpendiculairement par le centre d'inertie : si l'on prend un des premiers plans pour celui des $x y$, et l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres, pour l'axe des x , on aura $H = K$ et $D = 0$, en sorte que l'équation entre p et q deviendra

$$q = \pm \sqrt{\frac{E}{G - K}},$$

valeur constante arbitraire qui montre que les courbes que nous considérons se changent en des lignes droites parallèles à l'axe des x , et que tous les plans directeurs correspondans sont perpendiculaires à l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres; leurs centres de convergence, au lieu d'être déterminés, sont alors placés indifféremment à tous les points de leurs surfaces, comme on l'a déjà vu

dans le premier chapitre de ce Mémoire. En prenant au contraire pour plan des xy le plan principal perpendiculaire au même axe, on a $G = H$ et $D'' = 0$, d'où $D' = -D$; l'équation entre p et q devient donc

$$p^2 + q^2 - \frac{D}{E} = 0,$$

équation d'une circonférence décrite dans ce plan avec un rayon arbitraire, et dont le centre est au centre d'inertie. Tous les plans perpendiculaires à cette circonférence sont les plans principaux qui, en nombre infini, passent par l'axe principal dont le moment d'inertie diffère des deux autres. Il n'y a donc dans ce cas d'autres plans directeurs différens des plans principaux, que ceux que nous avons trouvés d'abord, et qui sont perpendiculaires à cet axe.

Quand le point L est sur celui des trois plans principaux dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres, et que ce point se trouve sur les axes de convergence qui sont les asymptotes de toutes les hyperboles dont les plans normaux sont des plans de convergence, on a $Dp^2 - D'q^2 = 0$, ce qui donne $KL = 0$ et

$$LO = KO = \frac{DD' \sin \beta^2}{M \sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}};$$

on peut mettre cette valeur sous une forme plus simple, comme il suit.

On a alors

$$q^2 = \frac{Dp^2}{D'};$$

et en nommant s la distance $GL = \sqrt{p^2 + q^2}$, il vient

$$s^2 = p^2 \left(1 + \frac{D}{D'} \right),$$

d'où

$$p^2 = \frac{D'}{D+D'} s^2,$$

$$q^2 = \frac{D}{D+D'} s^2,$$

$$D^2 p^2 + D'^2 q^2 = \frac{D^2 D' + D D'^2}{D+D'} s^2 = D D' s^2,$$

et par conséquent

$$LO = KO = \frac{DD' \sin \beta}{M \sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} = \frac{\sqrt{DD'}}{M s} \sin \beta,$$

valeur très-simple qui, dans ce cas, détermine immédiatement le point O , et donne, pour le diamètre de la circonférence sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant en L ,

$$LO' = \frac{\sqrt{DD'}}{M s} = \frac{\sqrt{DD'}}{M \cdot GL}.$$

Quant au plan directeur où est tracée cette circonférence, il suit de ce qui a été dit à la fin du premier chapitre de ce Mémoire, qu'il est perpendiculaire à la ligne GL ; c'est ce qui résulte aussi de ce que $\frac{q}{p} = \pm \sqrt{\frac{D'}{D}}$ donne

$$\tan \alpha = -\frac{D'q}{Dp} = \mp \sqrt{\frac{D'}{D}} = -\frac{p}{q}.$$

Cherchons maintenant la valeur du moment d'inertie relatif à l'axe permanent AM passant par le point L , ce moment d'inertie sera représenté par

$$\int (x'^2 + y'^2) dm;$$

et au moyen des valeurs de x' et de y' , on trouvera par les réductions connues qu'il est égal à

$$M(X'^2 + Y'^2) + (a^2 + b^2)G + (a'^2 + b'^2)H + (a''^2 + b''^2)K,$$

où $X'^2 + Y'^2$ est le carré de la perpendiculaire GK abaissée du centre d'inertie sur cet axe. Comme on a

$$a^2 + b^2 = 1 - c^2,$$

$$a'^2 + b'^2 = 1 - c'^2,$$

$$a''^2 + b''^2 = 1 - c''^2 = c^2 + c'^2,$$

cette valeur peut s'écrire ainsi :

$$M(X'^2 + Y'^2) + G + H + c^2(K - G) + c'^2(K - H),$$

ou

$$C + M \times \overline{GH}^2 + c^2 D' - c'^2 D,$$

en représentant toujours par C le moment d'inertie $G + H$ relatif à l'axe principal parallèle au plan directeur où se trouve l'axe permanent AM .

Au moyen des valeurs de c et de c' en fonction de p et de q , on a

$$\begin{aligned} c^2 D' - c'^2 D &= \frac{D^2 D' p^2 - D D'^2 q^2}{D^2 p^2 + D'^2 q^2} \sin^2 \beta \\ &= \frac{D D' (D p^2 - D' q^2)}{D^2 p^2 + D'^2 q^2} \sin^2 \beta = M \times KO \times KL, \end{aligned}$$

en sorte que le moment d'inertie de l'axe AM est égal à

$$C + M(\overline{GK}^2 + KL \times KO),$$

lorsque le point K est hors de la circonférence LOO' , afin que KL et KO aient le même signe. Alors, si l'on mène par le point K une tangente à cette circonférence, qu'on porte la longueur de cette tangente de K en R sur KL et qu'on joigne les points G et R par la ligne GR , on a

$$\overline{GR}^2 = \overline{GK}^2 + \overline{KR}^2 = \overline{GK}^2 + KL \times KO,$$

et le moment d'inertie cherché est

$$C + M \times \overline{GR}^2.$$

Ce cas a lieu quand KL et KO ou E et $\frac{DD'}{M}$, qui leur sont proportionnelles, sont de même signe, c'est-à-dire, 1.^o quand

50 MÉMOIRE SUR QUELQUES NOUVELLES PROPRIÉTÉS

on prend pour le plan des $x y$ celui dont le moment d'inertie est le plus grand, et que le plan directeur est parallèle à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit, puisque nous avons vu qu'alors les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux, étaient les premières ellipses pour lesquelles E et $\frac{D D'}{M}$ sont tous deux négatifs; 2.° quand on prend pour le plan des $x y$ celui dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres, et que le point L tombe dans l'un des deux angles opposés au sommet qui sont divisés en deux parties égales par l'axe dont le moment d'inertie est le plus grand, puisque, d'après ce que nous avons vu, les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux sont alors les premières hyperboles pour lesquelles E et $\frac{D D'}{M}$ sont positifs.

Mais, quand E et $\frac{D D'}{M}$ sont de signes contraires, les valeurs de $K L$ et de $K O$ le sont aussi, en sorte que le point K tombe entre les points L et O dans le cercle dont la circonférence est $L O O'$; et le terme du moment d'inertie de l'axe permanent $A M$ que nous avons remplacé par $M \times K O \times K L$, étant négatif, il faut, en prenant $K O$ et $K L$, indépendamment de leurs signes, écrire pour la valeur de ce moment d'inertie

$$C + M (\overline{G K}^2 - K L \times K O),$$

dont la construction, moins simple que dans le cas précédent, s'obtient par les moyens connus, en ayant soin de la modifier suivant que $\overline{G K}^2$ est plus grand ou plus petit que $K L \times K O$.

Ce cas a lieu,

1.° Quand on prend pour le plan des $x y$ celui dont le moment d'inertie est le plus petit, que le plan directeur est, par

conséquent, parallèle à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand, et que les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux, sont les secondes ellipses pour lesquelles E est positif et $\frac{DD'}{M}$ négatif;

2.^o Quand on prend pour le plan des $x y$ celui dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les deux autres, et que le point L tombe dans l'un des deux angles opposés au sommet qui sont divisés en deux parties égales par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit, puisque les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux, sont alors les secondes hyperboles pour lesquelles E est négatif et $\frac{DD'}{M}$ positif.

Lorsque le point L est situé sur l'un des axes de convergence perpendiculaires à leurs plans directeurs, axes qui sont les asymptotes de toutes ces hyperboles, on a $KL = 0$, $GK = GL$, et la valeur générale du moment d'inertie de l'axe AM devient

$$C + M \times \overline{GL}^2,$$

valeur indépendante de l'angle que forme cet axe avec sa projection sur le plan des $x y$, d'où il suit que tous les axes permanens compris dans un plan directeur perpendiculaire à l'une des deux lignes dont nous parlons, ont tous leurs momens d'inertie égaux entre eux et à

$$C + M \times \overline{GL}^2,$$

qui est, par les formules connues, la valeur du moment d'inertie de celui de ces axes permanens qui est perpendiculaire au plan que nous avons pris pour celui des $x y$; mais leurs centres de rotation se trouvent aux différens points de la circonférence LOO' .

Si nous prenons la valeur générale de ce moment d'inertie

G *

et que nous y remplacions $\overline{GK}^2$ par $\overline{GL}^2 - \overline{KL}^2$, cette valeur, qui est

$$C + M (\overline{GK}^2 + KL \times KO)$$

quand le point K est hors de circonférence LOO' , et

$$C + M (\overline{GK}^2 \pm KL \times KO)$$

quand il est au-dedans, deviendra, dans le premier cas,

$$C + M (\overline{GL}^2 \pm KL \times LO),$$

le signe $+$ devant être employé quand $KL < KO$, et le signe $-$ quand $KL > KO$, et, dans le second cas,

$$C + M (\overline{GL}^2 - KL \times LO).$$

Or, si l'on mène par le point L une parallèle à l'axe des z , qui est un des axes permanens passant par ce point L , dans le plan directeur que l'on considère, le moment d'inertie de cet axe permanent sera, d'après les formules connues, égal à

$$C + M \times \overline{GL}^2,$$

d'où il suit qu'il aura le plus grand moment d'inertie parmi tous les axes permanens du même plan directeur, 1.^o quand le plan directeur sera perpendiculaire à une des secondes ellipses ou des secondes hyperboles; 2.^o lorsque, ce plan étant normal à une des premières ellipses ou des premières hyperboles, on aura

$$KL > KO, \text{ ou } E > \frac{DD'}{M}.$$

Tandis que son moment d'inertie sera un *minimum* relativement à ceux des autres axes permanens du même plan directeur, quand ce plan étant toujours normal à une des premières ellipses ou des premières hyperboles, on aura

$$KL < KO, \text{ ou } E < \frac{DD'}{M}.$$

A l'égard de celui des mêmes axes permanens dont le moment d'inertie est un *minimum* dans les deux premiers cas, et un *maximum* dans le second, il est évident, puisque KL et LO sont dans un rapport constant pour chaque plan directeur, que ce sera l'axe permanent pour lequel LO aura la plus grande valeur et deviendra le diamètre LO' de la circonférence LOO' , en sorte que l'axe permanent correspondant est l'intersection du plan directeur avec le plan des xy .

Lorsque le diamètre LO' de la circonférence sur laquelle sont situés tous les centres de rotation des axes permanens d'un même plan directeur est nul, ces centres sont tous au même point L ; et comme on a pour tous $LO = 0$, leurs momens d'inertie deviennent tous égaux entre eux et à

$$C + M \times \overline{GL}^2.$$

Il suit des propriétés des axes permanens démontrées dans ce Mémoire, que cette double condition ne peut être satisfaite que par des axes permanens appartenant à un même plan directeur, et seulement, par conséquent, lorsque le point L , qui devient leur centre commun de rotation, est dans un des trois plans principaux et qu'on a

$$E = \frac{DD'}{M},$$

puisque

$$LO' = \frac{\frac{DD'}{M} - E}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}}.$$

La valeur de E étant ainsi déterminée, la courbe menée sur le plan des xy par tous les points qui jouissent de cette propriété, est évidemment une des sections coniques normales à tous les plans directeurs parallèles à l'axe des z ; et cette courbe ne peut se trouver que parmi celles pour lesquelles E et $\frac{DD'}{M}$ sont de même signe, c'est-à-dire parmi les pre-

mières ellipses ou les premières hyperboles. En faisant $E = \frac{(H-K)(K-G)}{M}$ dans l'équation générale des premières ellipses pour lesquelles K est plus grand que H et G , on trouvera que celle de l'ellipse cherchée est

$$(K-H)p^2 + (K-G)q^2 - \frac{(K-H)(K-G)}{M} = 0,$$

et en la mettant sous cette forme,

$$\frac{M p^2}{K-G} + \frac{M q^2}{K-H} = 1,$$

on verra que son grand axe est placé sur l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand; en le prenant pour l'axe des x ou des p , G sera plus petit que H , la valeur de la moitié de ce grand axe sera $\sqrt{\frac{K-G}{M}}$, et celle de la moitié du petit $\sqrt{\frac{K-H}{M}}$, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{K-G}{M} - \frac{K-H}{M}} = \sqrt{\frac{H-G}{M}}$$

pour la distance du centre au foyer.

Nous avons trouvé pour l'équation générale des premières hyperboles

$$D p^2 - D' q^2 = E:$$

E étant positif, on a donc pour celle de l'hyperbole cherchée

$$(H-K)p^2 - (K-G)q^2 = \frac{(H-K)(K-G)}{M};$$

comme son axe transverse est l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand et qu'il est pris dans cette équation pour l'axe des x ou des p , G est encore plus petit que H et K , ce qui exige que H soit plus grand que K pour que E soit positif: ainsi, dans cette équation comme dans celle de

l'ellipse que nous venons de déterminer, G est la plus petite des trois quantités G, H, K ; mais, dans l'ellipse, K est la plus grande des trois, et dans l'hyperbole, c'est H . Pour désigner les mêmes quantités par les mêmes lettres dans les deux cas, il est plus commode d'adopter les dénominations relatives à l'ellipse, où l'ordre alphabétique suit l'ordre des grandeurs relatives à ces trois quantités; alors il faut écrire, dans l'équation de l'hyperbole, H au lieu de K , et K au lieu de H ; elle devient ainsi

$$(K - H)p^2 - (H - G)q^2 = \frac{(K - H)(H - G)}{M},$$

ou

$$\frac{Mp^2}{H - G} - \frac{Mq^2}{K - H} = 1;$$

ce qui montre que le demi-axe transverse de cette hyperbole a pour valeur $\sqrt{\frac{H - G}{M}}$, c'est-à-dire qu'il est égal à la distance du centre au foyer de l'ellipse, en sorte que ses sommets sont aux foyers de l'ellipse. Son demi-axe conjugué a pour valeur $\sqrt{\frac{K - H}{M}}$, et celle de la distance du centre au foyer de cette hyperbole est par conséquent

$$\sqrt{\frac{H - G}{M} + \frac{K - H}{M}} = \sqrt{\frac{K - G}{M}},$$

qui est aussi la valeur du demi-grand axe de l'ellipse; en sorte que les sommets de cette ellipse sont aux foyers de l'hyperbole. Ces deux courbes sont d'ailleurs situées dans deux plans rectangulaires entre eux : l'ellipse, dans celui où sont toutes les premières ellipses, et qui est, comme nous l'avons vu, perpendiculaire à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit; et l'hyperbole, dans celui qui est perpendiculaire à l'axe principal dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les deux autres, le seul où les sections

coniques auxquelles les plans directeurs sont normaux deviennent des hyperboles. Pour distinguer l'ellipse et l'hyperbole dont tous les points sont les centres de rotation de tous les axes permanens passant par ces points dans les plans normaux à ces courbes, je les désignerai sous le nom d'*ellipse principale* et d'*hyperbole principale*. Les propriétés qui les caractérisent ont été découvertes par M. Binet, qui les a exposées dans le Mémoire déjà cité.

En continuant de désigner par G la plus petite des trois quantités G, H, K , par H la moyenne, et par K la plus grande, et en prenant toujours aussi pour l'axe des p , soit à l'égard des premières ellipses, soit à l'égard des premières hyperboles, l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand, on pourra prendre l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit pour l'axe de p , tant à l'égard des secondes ellipses qu'à celui des secondes hyperboles dont il est l'axe transverse.

Si l'on permute convenablement les lettres G, H, K , dans les valeurs de D et de D' , coefficients de p^2 et de q^2 dans l'équation

$$Dp^2 - D'q^2 = E$$

qui représente toutes ces courbes, et si l'on donne à E le signe convenable pour que sa valeur soit toujours positive, les équations de ces courbes seront, pour les premières ellipses,

$$D = H - K, D' = K - G,$$

et

$$(K - H)p^2 + (K - G)q^2 = E;$$

pour les premières hyperboles,

$$D = K - H, D' = H - G,$$

et

$$(K - H)p^2 - (H - G)q^2 = E;$$

pour les secondes ellipses,

$$D = H - G, D' = G - K,$$

et

$$(H - G)p^2 + (K - G)q^2 = E;$$

enfin pour les secondes hyperboles,

$$D = G - H, D' = H - K,$$

et

$$(H - G)p^2 - (K - H)q^2 = E.$$

CHAPITRE III.

Équation de la ligne sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des Axes permanens passant par un point donné.

Tous les axes permanens qui passent par un point donné *A* (fig. 1), dont *X, Y, Z* sont les coordonnées relatives aux trois axes principaux, sont compris, comme nous l'avons vu, dans la surface conique du second degré qui a pour équation

$$D X y z + D' Y x z + D'' Z x y + D Y Z x + D' X Z y + D'' X Y z = 0;$$

d'où il suit que tous leurs centres de rotation se trouvent sur une courbe qui est comprise dans la même surface, et qu'on peut représenter par le système formé de la réunion de cette équation avec une autre équation qu'il est facile d'obtenir de la manière suivante: *x, y, z*, étant les coordonnées du point *O* appartenant à cette courbe, et *u* la distance *AO*, on a

$$c = \frac{x-X}{u}, c' = \frac{y-Y}{u}, c'' = \frac{z-Z}{u},$$

et

$$u^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2;$$

H

mais nous avons trouvé une autre valeur de $AO = u$, qui devient

$$u = \frac{cc'D''}{M(cY - c'X)} - cX - c'Y - c''Z,$$

lorsqu'on y substitue au lieu de Z' sa valeur $-cX - c'Y - c''Z$; en éliminant c, c', c'' , et multipliant par u , on en conclut

$$u^2 = \frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-X)(y-Y)}{Yx - Xy} - Xx - Yy - Zz + X^2 + Y^2 + Z^2;$$

et en égalant ces deux valeurs de u^2 , on a l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - Xx - Yy - Zz = \frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-X)(y-Y)}{Yx - Xy}$$

qui représente une surface du troisième degré, dont l'intersection avec la surface conique donne la courbe cherchée.

On peut, dans cette équation, remplacer la quantité

$$\frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-X)(y-Y)}{Yx - Xy},$$

par une de ces deux-ci,

$$\frac{D'}{M} \cdot \frac{(x-X)(z-Z)}{Xz - Zx}, \quad \frac{D}{M} \cdot \frac{(y-Y)(z-Z)}{Zy - Yz},$$

ces trois quantités étant égales en vertu de l'équation même de la surface conique, comme il est aisé de s'en assurer par un calcul fort simple : on a ainsi trois équations du troisième degré qui peuvent être également employées pour déterminer la courbe des centres de rotation par leur intersection avec la surface conique.

Nous avons vu, page 23, que quand deux des axes principaux, que nous prendrons pour ceux des x et des y , ont des momens d'inertie égaux, la surface conique se change toujours en deux plans dont l'un est le plan abaissé du point

donné A perpendiculairement sur l'axe des z et dont l'équation est $z = Z$, l'autre passe par le même point A et par cet axe; il a pour équation $Xy - Yx = 0$, et est toujours un des plans principaux du corps.

Comme il faut alors faire $D'' = 0$, l'équation que nous venons de trouver devient $(Xy - Yx)(x^2 + y^2 + z^2 - Xx - Yy - Zz) = 0$, et se décompose en deux facteurs, dont l'un représente le plan principal dont nous venons de parler; en sorte que les centres de rotation situés dans ce plan ne sont plus déterminés par cette équation, qui se trouve ainsi satisfaite; ils ne peuvent donc plus l'être que par une des deux autres équations du troisième degré. Quant aux centres de rotation des axes permanens situés dans l'autre plan, comme le facteur $Xy - Yx$ n'est plus nul, ils sont déterminés par la condition que le second facteur de la même équation est alors nécessairement égal à zéro; ce qui donne $x^2 + y^2 - Xx - Yy = 0$, à cause de $z = Z$. Ces centres sont donc situés sur une circonférence tracée dans ce plan, dont le centre a pour coordonnées $\frac{1}{2}X$ et $\frac{1}{2}Y$, et qui passe à-la-fois par le point donné et par l'intersection du plan avec l'axe principal auquel il est perpendiculaire; il est aisé d'en conclure que les centres de rotation des axes permanens compris dans ce plan sont situés aux points où chaque axe est rencontré par la perpendiculaire abaissée du centre d'inertie sur cet axe.

Quand les trois momens d'inertie des axes principaux sont égaux entre eux, les trois quantités D, D', D'' sont nulles, et, d'après ce qui a été dit page 25, toutes les droites menées de quelque manière que ce soit sont des axes permanens, parce que le premier membre de l'équation de la surface conique est identiquement égal à zéro; alors les trois équations du troisième degré se réduisent à une seule, savoir :

H*

$$x^2 + y^2 + z^2 - Xz - Yy - Zz = 0,$$

qui est celle d'une surface sphérique dont le centre a pour coordonnées $\frac{1}{2} X$, $\frac{1}{2} Y$, $\frac{1}{2} Z$, et qui passe à-la-fois par le point donné et par le centre d'inertie; c'est sur cette surface sphérique que se trouvent tous les centres de rotation des droites menées par le point donné: d'où il suit que celui d'une droite quelconque est au point où elle est rencontrée par la perpendiculaire abaissée du centre d'inertie sur cette droite.

On peut déduire directement de l'équation que nous venons de trouver, pour la courbe des centres, les résultats auxquels nous sommes déjà parvenus dans le cas où le point A est dans un des trois plans principaux, en prenant ce plan pour celui des $x y$. Cette manière d'arriver à ces résultats a en outre l'avantage de montrer plus clairement à quoi ils tiennent.

Quand le point A tombe en L (fig. 1) dans le plan des $x y$, si l'on représente, comme nous l'avons fait, par p et q ses coordonnées relatives aux deux axes principaux qui sont dans ce plan, on aura à ce point $X = p$, $Y = q$, $Z = 0$; l'équation de la surface conique devient alors

$$(D p y + D' q x + D'' p q) z = 0,$$

et se décompose en deux facteurs représentant deux plans, dont l'un est le plan même des $x y$, et l'autre a pour équation

$$D p y + D' q x + D'' p q = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi,

$$D p (y - q) + D' q (x - p) = 0,$$

puisque

$$D'' = -D - D'.$$

Ce plan passe donc par le point L , il est perpendiculaire sur celui des x, y et sa projection sur ce dernier plan forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est égale à

$$-\frac{D'q}{Dp}.$$

On en conclut aisément qu'il est perpendiculaire à la section conique tracée dans ce plan et passant par le point L , dont l'équation est

$$Dp^2 - D'q^2 = E.$$

L'autre équation de la ligne des centres de rotation devient, pour les mêmes valeurs de X, Y, Z ,

$$z^2 = \frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-p)(y-q)}{qx - py} - x(x-p) - y(y-q);$$

d'où il suit qu'on a pour la ligne des centres de rotation situés dans le plan des x, y , l'équation du troisième degré

$$(qx - py)[x(x-p) + y(y-q)] - \frac{D''}{M}(x-p)(y-q) = 0,$$

et que, pour trouver celle de la ligne des centres qui sont dans le plan perpendiculaire à celui des x, y , il faudra la rapporter à l'ordonnée z et à une abscisse t prise sur l'intersection de ces deux plans et comptée depuis le point L . En faisant, pour abrégér,

$$\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2} = P,$$

on aura alors

$$x - p = \frac{Dpt}{P}, \quad y - q = -\frac{D'qt}{P},$$

$$qx - py = \frac{Dpqt + D'pqt}{P} = -\frac{D''pqt}{P},$$

et la valeur de z^2 se réduit à

$$z^2 = \frac{\frac{D D'}{M} + D' q^2 - D p^2}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} t - t^2,$$

équation d'une circonférence passant par le point donné A et dont le diamètre est égal au coefficient de t dans le premier terme de cette valeur de z^2 .

Lorsque $D = 0$, la tangente de l'angle formé par l'intersection du plan directeur et de celui des $x y$ avec l'axe des x devient infinie, en sorte qu'il est alors perpendiculaire à cet axe, et l'équation que nous venons de trouver pour la circonférence sur laquelle sont situés tous les centres de rotation des axes permanens menés par le point L , se réduit à $z^2 = q^2 t - t^2$; ce qui s'accorde avec le résultat obtenu page 59, en faisant $D'' = 0$.

Nous avons vu que les plans de ces circonférences sont normaux à une section conique qu'elles rencontrent chacune en un point par lequel passent toutes les droites situées dans ces plans, qui sont des axes permanens. La normale de la section conique à ce même point, que nous désignerons par

n , a pour expression $q \sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dp}\right)^2}$, ce qui donne $n =$

$\sqrt{q^2 + \frac{D^2 p^2}{D'^2}}$ quand on y remplace $\frac{dq}{dp}$ par sa valeur $\frac{D p}{D' q}$; et si l'on nomme a et b les demi-axes de cette

courbe, on aura pour son équation $q^2 \pm \frac{b^2}{a^2} p^2 = \pm b^2$,

qui doit être identique à $D p^2 - D' q^2 = E$, c'est-à-dire, à

$q^2 - \frac{D}{D'} p^2 = -\frac{E}{D'}$; on a donc $\pm \frac{b^2}{a^2} = -\frac{D}{D'}$,

et $q^2 - \frac{D}{D'} p^2 = \pm b^2$. En substituant ces valeurs dans

celle que nous venons de trouver pour le diamètre de la circonférence correspondante, après qu'on l'a écrite ainsi,

$$\frac{\frac{D}{M} q^2 + \frac{D}{D'} p^2}{\sqrt{q^2 + \frac{D^2}{D'^2} p^2}},$$

elle devient

$$\frac{\frac{D}{M} \pm b^2}{n},$$

la normale n se rapportant au même axe principal auquel est relative la différence D des moments d'inertie des deux autres, et b étant celui des deux demi-axes de la section conique qui est perpendiculaire à ce même axe principal.

Nous avons déjà remarqué qu'il existait deux autres surfaces dont l'intersection avec la surface conique détermine, en général, la même courbe des centres de rotation; mais, lorsque le point A est en L dans l'un des plans principaux et que la surface conique se change en deux plans, ces deux autres surfaces se partagent aussi chacune en deux nappes indépendantes l'une de l'autre, qui ne peuvent pas être combinées arbitrairement avec les deux plans qu'elles doivent rencontrer dans les points où se trouvent les centres de rotation, chaque nappe correspondant seulement à un de ces plans.

Pour discuter plus facilement toutes les circonstances de cette réduction des surfaces du troisième degré à des surfaces dont les équations sont moins élevées, je prends de nouvelles coordonnées x', y', z' , dont l'origine est au point donné et dont les axes sont parallèles à ceux des x, y, z des calculs précédents, en sorte que $x = X + x', y = Y + y', z = Z + z'$; alors l'équation générale de la surface conique prend cette forme très-simple,

$$D X y' z' + D' Y x' z' + D'' Z x' y' = 0;$$

et les trois équations du troisième degré sont

$$(Yx' - Xy')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + Xx' + Yy' + Zz') - \frac{D''}{M} x' y' = 0;$$

$$(Xz' - Zx')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + Xx' + Yy' + Zz') - \frac{D'}{M} x' z' = 0,$$

$$(Zy' - Yz')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + Xx' + Yy' + Zz') - \frac{D}{M} y' z' = 0.$$

Nous avons déjà vu ce qui résulte de la première, quand le point A tombe en L ; on fait $X = p$, $Y = q$, $Z = 0$, et elle devient

$$(q x' - p y')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + p x' + q y') - \frac{D''}{M} x' y' = 0;$$

alors l'équation de la surface conique se réduit à

$$(D p y' + D' q x') z' = 0,$$

et les deux autres équations du troisième degré se changent en

$$[x'^2 + y'^2 + z'^2 + (p - \frac{D'}{M p}) x' + q y'] z' = 0,$$

$$[x'^2 + y'^2 + z'^2 + p x' + (q + \frac{D}{M q}) y'] z' = 0,$$

qui se décomposent chacune en deux facteurs, dont l'un $z' = 0$ représente dans les deux cas le plan des xy , et dont l'autre donne une surface sphérique passant toujours par le point donné L , et dont le centre a pour coordonnées, à partir de ce point, $-\frac{1}{2}(p - \frac{D'}{M p})$, $-\frac{1}{2}q$, dans le premier cas, et $-\frac{1}{2}p$, $-\frac{1}{2}(q + \frac{D}{M q})$, dans le second.

Si l'on prend le second facteur $z' = 0$ de ces deux équations du troisième degré, il rendra identique celle de la surface conique, et les centres de rotation des axes permanens

passant par le point L , qui sont dans le plan des $x y$, resteront indéterminés; ce qui doit être, puisqu'ils sont compris, sur ce plan, dans la courbe dont l'équation

$$(q x' - p y')(x'^2 + y'^2 + p x' + q y') - \frac{D''}{M} x' y' = 0$$

est essentiellement du troisième degré, et ne peut, en conséquence, être donnée par l'intersection du plan des $x y$ avec des surfaces sphériques.

Je ferai remarquer, au sujet de cette dernière équation, qu'on peut l'écrire ainsi,

$$1 - \frac{p y'}{q x'} - \frac{D'' y'}{M q (x'^2 + y'^2 + p x' + q y')} = 0,$$

et qu'on voit alors qu'elle est satisfaite en faisant $p y' = q x'$, et x' et y' infinis. Elle a donc pour asymptote la droite représentée par cette dernière équation, qui est précisément celle qui passe par le point L et par le centre d'inertie du corps; ce qui était aisé à prévoir d'après ce que nous avons dit plus haut de cette droite.

Si l'on égale, au contraire, à zéro les premiers facteurs des mêmes équations, il faudra, pour que les équations des surfaces sphériques qui en résultent aient lieu, qu'on n'ait pas $z' = 0$; elles ne détermineront donc des centres de rotation par leur intersection avec la surface conique, qu'autant qu'on les combinera avec l'autre facteur $D p y' + D' q x' = 0$ de l'équation de cette surface, équation qui représente le plan directeur dont le centre de convergence est au point L ; et en effet, ces deux surfaces sphériques coupent ce plan dans la même circonférence que la surface exprimée par l'équation

$$(q x' - p y')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + p x' + q y') - \frac{D''}{M} x' y' = 0,$$

puisque leurs équations ne diffèrent de cette dernière que

parce que la quantité $\frac{D'' x' y'}{q x' - p y'}$ y est remplacée par une de ces deux-ci, $\frac{D' x'}{p}$, $-\frac{D y'}{q}$, et que ces trois quantités de-

viennent égales pour les points compris dans le plan directeur dont le centre de convergence est en L , en vertu de l'équation même de ce plan $D p y' + D' q x' = 0$, et de la relation $D + D' + D'' = 0$.

Supposons maintenant que le point donné A tombe en L (fig. 2) sur l'un des axes principaux, et qu'on prenne cet axe pour celui des x , il faudra faire $X = p$, $Y = 0$, $Z = 0$. L'équation de la surface conique se réduit alors à $y' z' = 0$, et les trois autres deviennent

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 + (p + \frac{D''}{M p}) x') y' = 0,$$

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 + (p - \frac{D'}{M p}) x') z' = 0,$$

$$y' z' = 0.$$

Cette dernière équation exprime, comme celle de la surface conique, les deux plans coordonnés des $x y$ et des $x z$, quoiqu'il ne suive pas nécessairement de ce qu'on trouve ainsi la même équation $y' z' = 0$ pour deux surfaces qui doivent se rencontrer dans la ligne des centres de rotation des axes permanens passant par le point L , qu'on ait à-la-fois $y' = 0$ $z' = 0$ sur une des branches de cette ligne : il est à remarquer que le système de ces deux dernières équations représente l'axe des x dont tous les points sont, en effet, comme on l'a vu dans ce qui précède, des centres de rotation relativement à cet axe lui-même qui passe par le point L . La même observation s'applique au cas où l'on prend dans les deux premières équations du troisième degré leur second facteur, qui est y'

dans l'une et z' dans l'autre, pour le combiner avec l'équation $y' z' = 0$, qui représente les deux plans dont se compose alors la surface conique. Mais l'on se tromperait fort, et l'on trouverait des points d'intersection qui ne seraient pas des centres de rotation d'axes permanens passant par le point L , si l'on croyait que les premiers facteurs des mêmes équations peuvent se combiner arbitrairement avec ceux de l'équation $y' z' = 0$. En effet, pour que la première des trois équations ci-dessus donne

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p + \frac{D''}{M p}\right) x' = 0,$$

il faut qu'on n'ait pas $y' = 0$, et par conséquent la surface sphérique exprimée par cette équation ne doit être combinée qu'avec le plan représenté par celle-ci $z' = 0$, c'est-à-dire avec le plan des $x y$; leur intersection est une circonfé-

rence dont l'équation est $y'' = -\left(p + \frac{D''}{M p}\right) x' - x'^2$,

qui passe par le point L et dont le diamètre est $-\frac{D''}{M p} - p$.

C'est sur cette circonférence que se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point L , qui sont situés dans le plan des $x y$.

De même, pour que le premier facteur

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p - \frac{D'}{M p}\right) x'$$

de la seconde équation soit nul, il faut qu'on n'ait pas $z' = 0$; il faudra donc réunir l'équation qu'on obtient, en l'égalant à zéro, avec $y' = 0$, équation du plan des $x z$, pour avoir celle de la circonférence sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point L qui

1*

sont dans ce dernier plan. On trouve ainsi l'équation

$$z'' = \left(\frac{D'}{Mp} - p \right) x' - x'' = 0,$$

qui est en effet celle de cette circonférence, comme on aurait pu le conclure de l'équation trouvée plus haut entre z et t , en y faisant $q = 0$, $t = x'$, et $z = z'$.

RÉSUMÉ.

ON sait qu'une ligne étant prise à volonté dans un corps, il peut arriver quatre cas :

1.° Qu'elle soit un axe permanent relativement à tous les points de sa longueur : ce cas ne peut avoir lieu que pour les axes principaux ;

2.° Qu'elle soit un axe permanent pour un point de sa longueur, qui est toujours unique : c'est le cas de tous les axes permanens proprement dits ;

3.° Qu'elle soit une limite d'axes permanens : il résulte des formules précédentes, et il est également aisé de conclure des théorèmes sur les axes principaux donnés par M. Binet, que cette propriété appartient exclusivement à toutes les droites passant par le centre d'inertie ;

4.° Qu'elle ne tombe dans aucun des trois cas précédens : ce qui ne peut arriver, d'après ce qu'on vient de voir, qu'à des lignes qui ne passent pas par le centre d'inertie.

Par un point donné autre que le centre d'inertie, on ne peut donc faire passer que trois sortes de lignes, et on en peut toujours faire passer trois sortes, savoir :

Une infinité d'axes permanens : il y en a au moins trois qui ont leur centre de rotation à ce point ;

Une ligne servant de limite à ces axes, c'est la droite qui joint le point donné au centre d'inertie;

Enfin des lignes qui ne sont ni axes permanens ni limites d'axes permanens.

J'ai trouvé;

1.^o Que les premières forment par leur réunion une surface conique du second degré dont l'équation est très-simple;

2.^o Que tous les axes permanens qui passent par le point donné sont compris dans deux plans rectangulaires, lorsque ce point est situé sur un des plans principaux passant par le centre d'inertie : l'un des deux plans rectangulaires est ce plan principal lui-même; l'autre, qui lui est perpendiculaire, se trouve déterminé complètement par la situation du point donné et les valeurs des momens d'inertie des trois axes principaux;

3.^o Que si l'on multiplie les trois différences entre les momens d'inertie relatifs aux trois axes principaux, respectivement par les cosinus des angles qu'ils forment avec la ligne qui joint le point donné au centre d'inertie, et qu'on divise les produits ainsi obtenus par les cosinus des angles compris entre les mêmes axes et une ligne quelconque passant par le point donné, cette ligne sera ou ne sera pas un axe permanent, suivant que la somme des quotiens résultant de ces divisions sera ou ne sera pas nulle, bien entendu que les différences entre les momens d'inertie relatifs aux trois axes principaux doivent être prises de manière que chaque moment d'inertie entre une fois positivement et une fois négativement dans ces différences;

4.^o Que, dans le cas où l'on s'est assuré ainsi qu'une ligne donnée est un axe permanent, et qu'on veut déterminer son centre de rotation, il faut abaisser du centre d'inertie une perpendiculaire sur cette ligne, et prendre, à partir du point *K*

(fig. 1) où elle la rencontre, une distance égale à une des valeurs de K O données page 33; l'autre extrémité O de cette distance sera le centre de rotation cherché : ou bien déterminer ce centre par la construction décrite pages 33 et 34;

5.° Que, dans tout plan mené par le point donné et le centre d'inertie, il y a un axe permanent passant par ce point et déterminé par les formules données pages 18-19;

6.° Que, dans le cas où le point donné est sur un des plans principaux, et où tous les axes permanens qui y passent sans être compris dans ce plan se trouvent dans un autre plan perpendiculaire au premier, les centres de rotation de ces axes sont situés sur une circonférence qui passe par le point donné et y touche la droite qui y est élevée perpendiculairement au plan principal, droite qui est elle-même un axe permanent;

7.° Que les plans différens des plans principaux où se trouvent ainsi une infinité d'axes permanens menés par un même point situé dans leur intersection avec un plan principal, sont normaux à une section conique qui passe par ce point, et qui est comprise dans le plan principal;

8.° Que toutes celles de ces sections coniques qui sont comprises dans un même plan principal sont semblables entre elles, et ont leurs axes dans le rapport des racines carrées des différences entre le moment d'inertie relatif à ce plan principal et les momens d'inertie relatifs aux deux autres plans principaux;

9.° Que ces sections coniques sont des hyperboles sur le plan principal dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres plans principaux et des ellipses sur ces derniers;

10.° Que si l'on veut trouver la valeur du moment d'inertie d'une ligne donnée qui satisfait au caractère auquel on reconnaît les axes permanens, il est aisé de la trouver par l'expression algébrique ou par la construction géométrique que nous

avons données, aux pages 49 et 50, pour déterminer ce moment d'inertie;

11.° Que la ligne sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par un point donné, est déterminée par l'intersection d'une surface du troisième degré avec la surface conique qui comprend tous ces axes;

12.° Qu'il y a en général trois surfaces du troisième degré qui peuvent servir indifféremment à cette détermination;

13.° Que quand le point donné est dans un des plans principaux, et que la surface conique devient un système de deux plans, une des trois surfaces reste du troisième degré et donne, par ses intersections avec les deux plans de ce système, tous les centres de rotation cherchés, tandis que les deux autres sont remplacées chacune par une surface sphérique et un plan qui se confond avec un des plans de la surface conique, en sorte que rien ne détermine plus les centres de rotation dont l'intersection de ces deux plans devrait donner le lieu, mais que ceux de l'autre plan de la surface conique continuent d'être déterminés par l'intersection commune de ce dernier et de la surface sphérique correspondante;

14.° Que, dans le cas où le point donné est sur un des axes principaux, et que la surface est remplacée par le système des deux plans principaux qui passent par cet axe, une des trois surfaces se change précisément dans ce même système et peut être regardée comme ne déterminant plus nécessairement des centres de rotation d'axes permanens passant par le point donné, mais qu'elle indique cependant par l'intersection des deux plans dont elle se compose ainsi que la surface conique, les centres de rotation situés à tous les points de l'axe principal sur lequel se trouve ce point donné;

15.° Que, dans le même cas, les deux autres surfaces sont remplacées par deux systèmes composés chacun d'un plan et

d'une surface sphérique; qu'on retrouve ainsi les deux plans principaux dont l'intersection donne tous les centres de rotation situés sur l'axe principal qui passe par le point donné; que chaque surface sphérique ne doit être combinée qu'avec un des plans dont se compose alors la surface conique, et y détermine tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point donné qui sont situés dans ce plan sans l'être sur l'axe principal mené par le même point.

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT

Sur le Mouvement d'un Corps qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice.

ON peut distinguer trois cas dans ce mouvement, celui où le corps est assujéti à tourner autour d'un axe donné de position, celui où il peut pirouetter en tout sens autour d'un point fixe, celui où il est entièrement libre. Le premier de ces trois cas ne présentant aucune difficulté, nous ne nous occuperons ici que des deux derniers.

Avant de nous livrer à cette recherche, il faut nous faire une idée précise de la manière dont on peut déterminer à chaque instant la position d'un corps, qui peut tourner en tout sens autour d'un point donné auquel il est lié d'un manière invariable.

On prend à volonté pour cela trois droites, perpendiculaires entre elles, fixes dans l'espace, et passant par le point donné : ces trois droites sont les trois axes d'un premier système de coordonnées, x, y, z .

On prend ensuite trois autres droites, passant par le même point et rectangulaires entre elles, mais liées invariablement avec le corps et se mouvant avec lui : ces droites sont les axes d'un second système de coordonnées x', y', z' .

La position relative de ces deux systèmes dépend en général de trois angles ; ceux qu'il est le plus commode d'employer pour la déterminer, sont les deux angles formés par les axes des x et des x' , avec la droite qui est la commune intersection des plans des xy et des $x'y'$, et l'angle dièdre formé par ces deux plans. Ce dernier angle est évidemment égal à l'angle plan compris entre l'axe des z et celui des z' .

Quant aux deux autres, on les détermine lorsque l'on connaît les angles formés par chacun des mêmes axes avec les deux autres axes de l'autre système, au moyen du théorème suivant :

Nommons α et β les angles compris, soit entre l'axe des z , et ceux des x et des y , soit entre l'axe des z et ceux des x , et des y , nommons ρ l'angle formé par l'intersection des plans des xy et des x, y ; dans le premier cas avec l'axe des x , dans le second avec l'axe des x ; les plans des angles α et β étant prolongés jusqu'au plan perpendiculaire à leur commune intersection, formeront, dans l'angle dièdre compris entre les plans des xy et des x, y , deux triangles sphériques rectangles dont les côtés opposés à cet angle dièdre seront égaux à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et à $\frac{\pi}{2} - \beta$, et dont les hypoténuses seront ρ et $\rho + \frac{\pi}{2}$. Or, quand deux triangles sphériques rectangles ont un angle commun, les sinus des côtés opposés à cet angle sont proportionnels aux sinus des hypoténuses : on aura donc $\cos \beta : \cos \alpha :: \cos \rho : \sin \rho :: 1 : \tan \rho$, et par conséquent $\tan \rho = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

On a coutume, pour rendre simples et symétriques les calculs où l'on considère, dans leurs rapports mutuels, les deux systèmes d'axes dont nous venons de parler, de désigner par a, b, c , les cosinus des angles que forme l'axe des x avec ceux des x, y, z ; par a', b', c' , ceux de l'axe des y avec les mêmes axes; enfin par a'', b'', c'' , les cosinus des angles compris entre eux et l'axe des z : alors $x = ax + by + cz$, $y = a'x + b'y + c'z$, $z = a''x + b''y + c''z$. Si l'on nomme θ l'angle compris entre le plan des xy et celui des x, y , ψ et ϕ les angles que forment les axes des x et des y , avec l'intersection de ces deux plans, on aura $\cos \theta = c''$, et, en vertu du théorème précédent, $\tan \psi = \frac{c}{c'}$, et $\tan \phi = \frac{a''}{b''}$.

Parmi les neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, trois seulement sont indépendantes, et les six autres sont liées avec elles par les équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1;$$

$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0.$$

Si l'on tire des deux dernières les valeurs de c et de c' , on aura

$$c = \frac{a''b'c'' - a'b''c''}{a'b - ab'}, \quad c' = \frac{ab''c'' - a''b'c''}{a'b - ab'},$$

et par conséquent,

$$\frac{a'b - ab'}{c''} = \frac{a''b' - a'b''}{c} = \frac{ab'' - a''b}{c'} = n,$$

nombre constant qui reste à déterminer. On a

$$a'^2b^2 + a^2b'^2 + a''b''^2 + a'^2b''^2 + a^2b''^2 + a''b''^2 \\ - 2aa'bb' - 2a'a'b'b'' - 2aa''bb'' = n^2(c^2 + c'^2 + c''^2),$$

$$\text{ou } n^2 = a^2(1-b^2) + a'^2(1-b'^2) + a''^2(1-b''^2) - 2aba'b' - 2aba''b'' \\ - 2a'b'a''b'' = a^2 + a'^2 + a''^2 - (ab + a'b' + a''b'') = 1.$$

On peut donc prendre également $n = 1$ ou $n = -1$: en adoptant la première de ces valeurs, il vient

$$a'b - ab' = c'', \quad ab'' - a''b = c', \quad a'b' - a'b'' = c.$$

Les équations de l'équilibre d'un système de points matériels liés invariablement entre eux, qui est assujéti à tourner autour d'un point fixe, et dont les particules sont soumises à l'action de forces motrices représentées par X, Y, Z pour le point m , par X', Y', Z' pour le point m' , &c. étant

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX),$$

on aura, pour les équations du mouvement,

$$\Sigma\left[yZ - zY - m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[zX - xZ - m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[xY - yX - m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0.$$

K*

Lorsque le système n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, ces équations deviennent

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0, \quad \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0,$$

dont les intégrales relatives à la variable t sont

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = l, \quad \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = l',$$

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = l''.$$

Ces équations expriment que les sommes des moments des quantités de mouvement $m \frac{dx}{dt}$, $m \frac{dy}{dt}$, $m \frac{dz}{dt}$, de chaque particule du corps, autour de trois axes fixes dans l'espace, restent constantes pendant toute la durée du mouvement.

Comme on a $\frac{dx}{dt} = x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt}$,

$$\frac{dy}{dt} = x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt},$$

pour les vitesses du point m , parallèlement aux x, y, z , on en déduira les valeurs de celles du même point, parallèlement aux x', y', z' , en projetant les premières sur les directions de celles-ci. En faisant, pour abréger,

$$b \frac{dc}{dt} + b' \frac{dc'}{dt} + b'' \frac{dc''}{dt} = c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt} = p,$$

$$c \frac{da}{dt} + c' \frac{da'}{dt} + c'' \frac{da''}{dt} = a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} = q,$$

$$a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt} = b \frac{da}{dt} + b' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{da''}{dt} = r,$$

où nous avons pris positivement les termes de la forme $b \frac{dc}{dt}$, $c \frac{da}{dt}$, $a \frac{db}{dt}$, parce que ce sont eux qui correspondent aux termes $y \frac{dz}{dt}$,

$z \frac{dx}{dt}$, $x \frac{dy}{dt}$, qui l'ont été dans les équations

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = l, \quad \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = l', \quad \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = l'',$$

et en ajoutant les projections qui appartiennent à chacun des axes des x , des y , et des z , on trouve, pour ces dernières vitesses,

$$a \frac{dx}{dt} + a' \frac{dy}{dt} + a'' \frac{dz}{dt} = y, r - z, q, \quad b \frac{dx}{dt} + b' \frac{dy}{dt} + b'' \frac{dz}{dt} = z, p - x, r,$$

$c \frac{dx}{dt} + c' \frac{dy}{dt} + c'' \frac{dz}{dt} = x, q - y, p$, d'où il suit que les sommes des quantités de mouvement autour des axes des x , y , z , sont

$$\Sigma m [y, (x, q - y, p) - z, (z, p - x, r)] =$$

$$q \Sigma m x, y, + r \Sigma m x, z, - p \Sigma m (y^2 + z^2),$$

$$\Sigma m [z, (y, r - z, q) - x, (x, q - y, p)] =$$

$$r \Sigma m y, z, + p \Sigma m x, y, - q \Sigma m (x^2 + z^2),$$

$$\Sigma m [x, (z, p - x, r) - y, (y, r - z, q)] =$$

$$p \Sigma m x, z, + q \Sigma m y, z, - r \Sigma m (x^2 + y^2).$$

En les représentant par U , V , W , et en faisant attention que, pour avoir les sommes des mêmes momens autour des axes des x , des y et des z , qui sont respectivement égales à l , l' et l'' , il suffit d'y appliquer le même mode de projection par lequel on passe des valeurs de x , y , z , à celles de x , y , z , on obtiendra, pour les trois équations qui expriment toutes les conditions du problème,

$$aU + bV + cW = l, \quad a'U + b'V + c'W = l', \quad a''U + b''V + c''W = l''.$$

Si l'on prend pour les axes des x , des y , et des z , les trois axes principaux du système relatif au point fixe où l'on a placé l'origine des coordonnées, on aura $U = -p \Sigma m (y^2 + z^2)$, $V = -q \Sigma m (x^2 + z^2)$, $W = -r \Sigma m (x^2 + y^2)$; ce qui simplifie beaucoup les trois équations précédentes. Lorsque le système est un corps dont la masse est continue; il faut remplacer m par dm , et le signe Σ par $\int$, en sorte qu'en nom-

mant A, B, C , les trois momens d'inertie du corps pris par rapport à ces trois axes principaux, $U = -Ap$, $V = -Bq$, $W = -Cr$, et que les trois équations deviennent $aAp + bBq + cCr = -l$, $a'Ap + b'Bq + c'Cr = -l'$, $a''Ap + b''Bq + c''Cr = -l''$. En les différenciant, on a

$$\begin{aligned} aA \frac{dp}{dt} + bB \frac{dq}{dt} + cC \frac{dr}{dt} + Ap \frac{da}{dt} + Bq \frac{db}{dt} + Cr \frac{dc}{dt} &= 0, \\ a'A \frac{dp}{dt} + b'B \frac{dq}{dt} + c'C \frac{dr}{dt} + Ap \frac{da'}{dt} + Bq \frac{db'}{dt} + Cr \frac{dc'}{dt} &= 0, \\ a''A \frac{dp}{dt} + b''B \frac{dq}{dt} + c''C \frac{dr}{dt} + Ap \frac{da''}{dt} + Bq \frac{db''}{dt} + Cr \frac{dc''}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant maintenant et ces équations elles-mêmes et leurs différentielles, d'abord par a, a', a'' , ensuite par b, b', b'' , enfin par c, c', c'' , et ajoutant les produits obtenus dans chacune de ces six opérations, on trouve, en vertu des relations entre les neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, et des valeurs de p, q, r , que $Ap = -al - a'l' - a''l''$, $Bq = -bl - b'l' - b''l''$, $C = -cl - c'l' - c''l''$, et que

$$A \frac{dp}{dt} + (B-C)qr = 0, \quad B \frac{dq}{dt} + (C-A)pr = 0, \quad C \frac{dr}{dt} + (A-B)pq = 0.$$

En multipliant ces trois équations, respectivement par p, q, r , ajoutant les produits et intégrant, on a $A p^2 + B q^2 + C r^2 = k^2$, et en les multipliant de même par Ap, Bq, Cr , et intégrant, il vient

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

h^2 et k^2 étant deux constantes arbitraires.

On tire de ces dernières équations et de $C \frac{dr}{dt} = (B-A)pq$, celles-ci :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{k^2 - B h^2 + (B-C) C r^2}{(A-B) A}, \\ q^2 &= \frac{A h^2 - k^2 + (C-A) C r^2}{(A-B) B}, \\ dt &= \frac{C dr \sqrt{AB}}{\sqrt{[k^2 - B h^2 + (B-C) C r^2] [A h^2 - k^2 + (C-A) C r^2]}}, \end{aligned}$$

et la détermination des valeurs p, q, r , en fonction de t , est ainsi réduite à une seule intégration par quadrature; cette intégration ne peut s'effectuer sous forme finie que dans des cas particuliers que nous examinerons par la suite.

En ajoutant les carrés des valeurs de $A p$, de $B q$ et de $C r$, on trouve

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

d'où il suit, d'après la théorie des momens, que la constante $k = \sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2}$ est la somme des momens des quantités de mouvement autour de l'axe passant par l'origine pour lequel cette somme est la plus grande possible, et que cet axe forme, avec ceux des x , des y et des z , des angles dont les cosinus sont $\frac{l}{k}$, $\frac{l'}{k}$ et $\frac{l''}{k}$, valeurs constantes d'où il résulte, conformément à un principe général de mécanique dont ce résultat est un cas particulier, que la direction de cet axe est invariable. Nous verrons bientôt comment on la détermine, à l'époque où l'on commence à considérer le mouvement, d'après les données qui déterminent le mouvement à cette époque.

Puisque cette direction est invariable, on peut prendre l'axe dont nous parlons pour celui des z , alors, $l = 0$, $l' = 0$, $l'' = k$, les valeurs de $A p$, $B q$, $C r$, se réduisent à un seul terme, et l'on a $a'' = -\frac{A p}{k}$, $b'' = -\frac{B q}{k}$, $c'' = -\frac{C r}{k}$, d'où $\cos \theta = c'' = -\frac{C r}{k}$ et $\tan \phi = \frac{a''}{b''} = \frac{A p}{B q}$.

Il reste à trouver $\tan \psi = \frac{c'}{c''}$: pour cela, on différenciera cette équation et l'on aura

$$\frac{d \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{c' d c - c d c'}{c'^2};$$

$$\text{or, } \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2}} = \frac{c'}{\sqrt{1 - c''^2}}.$$

Donc

$$\frac{d\downarrow}{dt} = \frac{c' \frac{dc}{dt} - c \frac{dc'}{dt}}{1 - c^2}.$$

Éliminons $\frac{dc''}{dt}$ entre les deux équations

$$b \frac{dc}{dt} + b' \frac{dc'}{dt} + b'' \frac{dc''}{dt} = p,$$

$$a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} = -q;$$

il viendra

$$(a''b - ab'') \frac{dc}{dt} + (a''b' - a'b'') \frac{dc'}{dt} = a''p + b''q = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{k}$$

Mais $a''b - ab'' = -c'$, $a''b' - a'b'' = c$, $c'' = -\frac{Cr}{h}$;

on a donc $-c' \frac{dc}{dt} + c \frac{dc'}{dt} = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{k}$;

ce qui donne $\frac{d\downarrow}{dt} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{k(1 - C^2 r^2)} = \frac{(Ap^2 + Bq^2)k}{k^2 - C^2 r^2} = \frac{(h^2 - Cr^2)k}{k - C^2 r^2},$

et $d\downarrow = \frac{h^2 - Cr^2}{k^2 - C^2 r^2} k dr$, où il faudra remplacer dt par sa valeur en r et dr , trouvée ci-dessus: on aura ainsi

$$d\downarrow = dr F(r),$$

et en intégrant cette quadrature, le problème sera complètement résolu, puisque

$$\cos \theta = -\frac{Cr}{k},$$

$$\tan \phi = \frac{Ap}{Bq} = \frac{k^2 - Br^2 + (B-C)Cr^2}{Ah^2 - k^2 + (C-A)Cr^2},$$

et que r a déjà été déterminé en fonction de t par une autre quadrature.

FIN.

